

---

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Departamento de Matemática Aplicada

---

# Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real

**Fernando Rodrigo Rafaeli\***

Doutorado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

**Orientador:** Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov

\* Este trabalho teve apoio financeiro da FAPESP.

# ZEROS DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS NA RETA REAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado devidamente corrigida e defendida por Fernando Rodrigo Rafaeli e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de fevereiro de 2010.

  
Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov - orientador

  
Prof. Dr. Roberto Andreani - co-orientador

## Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
2. Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui
3. Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
4. Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
5. Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

# FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezzerá Müller - CRB / 6162

Rafaeli, Fernando Rodrigo

R121z Zeros de polinômios ortogonais na reta real/Fernando Rodrigo Rafaeli-Campinas,  
[S.P.: s.n.], 2010.

Orientador: Dimitar Kolev Dimitrov ; Roberto Andreani.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Polinômios ortogonais. I. Dimitrov, Dimitar Kolev II. Andreani,  
Roberto. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Zeros of orthogonal polynomials on the real line

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Orthogonal polynomials.

Área de concentração: Análise Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca Examinadora: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov (IBILCE-UNESP)

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga (IBILCE-UNESP)

Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto (ICMC-USP)

Data da defesa: 26/02/2010

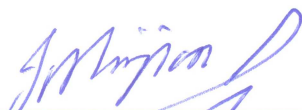
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 26 de fevereiro de 2010 e  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



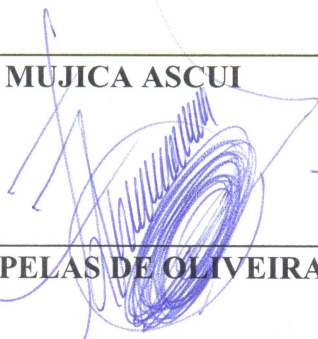
---

**Prof(a). Dr(a). DIMITAR KOLEV DIMITROV**



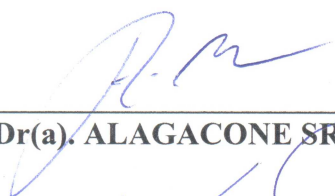
---

**Prof(a). Dr(a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI**



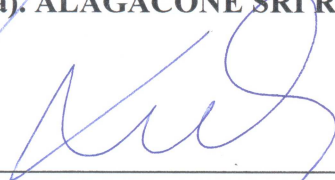
---

**Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA**



---

**Prof(a). Dr(a). ALAGACONE SRITRANGA**



---

**Prof(a). Dr(a). VALDIR ANTONIO MENEGATTO**

Aos meus pais,  
Dionísio e Marlene,  
ao meu irmão mais velho Márcio  
e minha cunhada Andréia,  
e ao meu irmão mais novo, Cleber,  
com amor, dedico.

# Agradecimentos

Bem, chegou a hora de agradecer a todos aqueles que me ajudaram e contribuíram para minha formação nesses últimos anos.

Para começar, é difícil transcrever em palavras o quanto sou grato ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov. Desde o primeiro dia em que o conheci tem me ensinado muito e, principalmente, aprendi com ele o gosto pela pesquisa. Grande parte de minha formação devo a ele. Muito obrigado Prof. Dimitar.

Como não lembrar dos demais professores do Grupo de Polinômios Ortogonais da UNESP de São José do Rio Preto, SP. Agradeço em especial a Profa. Dra. Eliana Xavier L. de Andrade, por todo o carinho, amizade, por ter sido a professora de meu primeiro curso de Polinômios Ortogonais e, também, agradeço fortemente por ter lido e corrigido a primeira versão de minha tese. Sou muito grato ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga por todo o apoio, pelos ensinamentos, pela amizade e incentivo. Não posso esquecer da Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pelo carinho, pela amizade, pelo incentivo e cuidado que sempre teve comigo.

Também tenho muito a agradecer ao Prof. Dr. Francisco Marcellán, da Universidad Carlos III de Madrid, España. Conheci esta grande pessoa em junho de 2008 em um congresso internacional realizado em Campos do Jordão, Brasil. Neste encontro ele me confiou um problema sobre zeros de polinômios ortogonais semi-clássicos, dando um novo rumo em minha pesquisa de doutorado. Também agradeço por ter me recebido na Universidad Carlos III por 2 meses, período este que foi muito benéfico cientificamente para mim. Agradeço também por todo o carinho e cuidado que teve comigo e por compartilhar um pouco dos seus conhecimentos. Agradeço aqui também aos alunos de doutorado do Prof. Marcellán, Kenier Castillo Rodríguez e Edmundo J. Huertas Cejudo, por terem me recebido de braços abertos, encontrado um lugar para eu ficar nesse tempo, por compartilhar

---

de suas pesquisas em matemática e por toda a amizade.

Agradeço ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP. Em especial ao meu co-orientador Prof. Dr. Roberto Andreani, por cuidar de toda a parte burocrática e pela disciplina ministrada, a qual foi muito importante em minha formação. Ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada Prof. Dr. Aurélio Ribeiro L. de Oliveira pelo seu apoio. Também ao pessoal da secretaria de Pós-Graduação, em especial a Tânia por toda ajuda e atenção. Agradeço a todos os meus colegas da UNICAMP, em especial à Cecília P. de Andrade, Denise de Siqueira, Douglas S. Gonçalves, Fernanda T. Nunes, José E. A. Neto, Leandro da Fonseca Prudente, Robson da Silva, Rodrigo S. Lima e Valtemir M. Cabral.

Ao Departamento de Ciências da Computação e Estatística da UNESP de São José do Rio Preto, agradeço por ter cedido seu espaço físico durante minha permanência naquele local e aos colegas da UNESP, Alyne Toscano Martins, Cristiane Maria Defalque, Marcos Proença de Almeida e Wallace C. O. Casaca, também agradeço.

Ao colega de longa data, Fábio Rodrigues Lucas, por todos estes anos de convivência. Aos demais colegas do Grupo de Polinômios Ortogonais, Eliel José C. dos Santos, Guilherme L. F. da Silva, Heron Martins Félix, José Augusto Coelho, Manuella A. F. de Lima, Regina da Silva Lamblém, Vanessa G. P. Paschoa, Yen Chi Lu e, em especial, à Mirela V. de Mello pela colaboração em alguns dos resultados deste trabalho. Agradeço também à Gabriela P. Mosquera por todo o apoio nos meus primeiros dois anos de doutorado.

Não posso deixar de mencionar minha gratidão à orientadora de graduação Profa. Dra. Débora Lobo, pois se não fosse seu incentivo para continuar meus estudos, talvez eu não estaria aqui hoje.

Agradeço também aos membros da Banca Examinadora por aceitarem o convite de participar da defesa desta tese de doutorado e por todas as sugestões.

Sou eternamente grato à minha família cujo apoio incondicional tornou possível a realização deste projeto.

Finalmente, meu agradecimento à FAPESP pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho são obtidos resultados sobre o comportamento de zeros de polinômios ortogonais. Sabe-se que todos eles são reais e distintos e fazem papel importante de nós das mais utilizadas fórmulas de integração numérica, que são as fórmulas de quadratura de Gauss. São obtidos resultados sobre a localização e a monotonicidade dos zeros, considerados como funções dos correspondentes parâmetros, dos polinômios ortogonais clássicos. Apresentaremos também vários resultados que tratam da localização, monotonicidade e da assintótica de zeros de certas classes de polinômios ortogonais relacionados com as medidas clássicas.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais, zeros, monotonicidade, limites, assintótica.



# Abstract

Results concerning the behaviour of zeros of orthogonal polynomials are obtained. It is known that they are real and distinct and play as important role as node of the most frequently used rules for numerical integration, the Gaussian quadrature formulae. Result about the location and monotonicity of the zeros, considered as functions of parameters involved in the measure, are provided. We present various results that treat questions about location, monotonicity and asymptotics of zeros of certain classes of orthogonal polynomials with respect to measure that are closely related to the classical ones.

Key words: Orthogonal polynomials, zeros, monotonicity, limits, asymptotics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Polinômios ortogonais na reta real</b>	<b>11</b>
2.1	Propriedades básicas . . . . .	11
2.2	Algumas propriedades básicas dos zeros . . . . .	14
2.3	Polinômios ortogonais clássicos . . . . .	18
2.3.1	Polinômios ortogonais de Jacobi . . . . .	19
2.3.2	Polinômios ortogonais de Laguerre . . . . .	20
2.3.3	Polinômios ortogonais de Hermite . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Alguns resultados técnicos</b>	<b>25</b>
3.1	Teoremas de Sturm . . . . .	25
3.2	Critério de Routh-Hurwitz . . . . .	26
3.3	Teoremas de Perron-Frobenius e Hellmann-Feynman . . . . .	30
3.4	Zeros de polinômios da forma $f(x) = h_n(x) + cg_n(x)$ . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Zeros dos polinômios ortogonais clássicos</b>	<b>35</b>
4.1	Interpretação eletrostática . . . . .	35
4.2	Monotonicidade . . . . .	42
4.3	Velocidade de crescimento . . . . .	47
4.3.1	Zeros dos polinômios de Gegenbauer . . . . .	48
4.3.2	Zeros dos polinômios de Jacobi . . . . .	55
4.3.3	Zeros dos polinômios de Laguerre . . . . .	62

4.4	Demonstração dos resultados . . . . .	65
4.4.1	Demonstração dos resultados sobre os zeros dos polinômios de Jacobi	66
4.4.2	Demonstração dos resultados sobre os zeros dos polinômios de Laguerre	78
<b>5</b>	<b>Zeros de polinômios ortogonais relacionados a medidas clássicas</b>	<b>81</b>
5.1	Zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev generalizados . . . . .	82
5.1.1	Polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev generalizados . . . . .	83
5.1.2	Polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev generalizados . . . . .	90
5.1.3	Polinômios ortogonais do tipo Hermite Sobolev generalizados . . . . .	96
5.2	Zeros de polinômios ortogonais gerados por uma perturbação . . . . .	100
5.2.1	Polinômios ortogonais do tipo Jacobi . . . . .	101
5.2.2	Polinômios ortogonais do tipo Laguerre . . . . .	112
5.2.3	Polinômios ortogonais do tipo Hermite . . . . .	116
5.3	Zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev . . . . .	119
5.3.1	Polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev . . . . .	119
5.3.2	Polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev . . . . .	123
5.3.3	Polinômios ortogonais do tipo Hermite-Sobolev . . . . .	127
5.4	Problemas em aberto . . . . .	129
5.4.1	Polinômios ortogonais gerados por uma perturbação na medida . . . . .	129
5.4.2	Polinômios ortogonais do tipo Sobolev . . . . .	130
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>131</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos e de polinômios ortogonais relacionados às medidas clássicas.

Os problemas sobre o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais atraíram a atenção de célebres matemáticos como A. Markov e T. J. Stieltjes ainda no final do século *XIX* e G. Szegő na terceira década do século *XX* por vários motivos. Dentre eles destacamos sua bela interpretação física advinda da eletrostática e seu papel como nós das mais usadas fórmulas de quadratura, as de Gauss, que serão descritos abaixo.

Este tema continua sendo o interesse de alguns famosos matemáticos, como Percy Deift do Courant Institute of Mathematical Sciences, autor do livro “Orthogonal Polynomials and Random Matrices: a Riemann-Hilbert Approach”, e de Barry Simon, um dos autores, junto com Michael Reed, dos famosos quatro volumes “Methods of Modern Mathematical Physics”. O recente interesse de Barry Simon em polinômios ortogonais resultou em um volumoso e consistente livro “Orthogonal Polynomials on the Unit Circle” e em dezenas de artigos, sendo vários tratando de zeros de polinômios ortogonais na circunferência unitária e na reta real.

Mais uma justificativa para a abrangência das aplicações dos zeros de polinômios ortogonais é o fato de alguns resultados serem utilizados por autores em áreas como Teoria dos Códigos em Álgebra, Equações Diferenciais, Física Matemática, Teoria das Funções Univalentes em Análise Complexa e, até, em Mecânica Quântica.

**Nós das fórmulas de quadratura de Gauss.** Uma das motivações mais importantes para o estudo dos zeros dos polinômios ortogonais é o fato deles serem os nós das mais utilizadas fórmulas de quadratura, as de Gauss. Só para esclarecer, quadraturas numéricas consistem em aproximar a integral de uma função  $f$

$$I(f) = \int_{\Sigma} f(x) d\mu(x)$$

por uma combinação linear de  $n$  valores da função da forma

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

É fato que escolhendo os nós da fórmula de quadratura como sendo os zeros do  $n$ -ésimo polinômio ortogonal em  $\Sigma$ , associado a  $\mu$ , então  $Q_n$  tem o maior grau de precisão algébrica possível, que é exatamente  $2n-1$ . Por esse motivo, os pacotes numéricos, em geral, utilizam as fórmulas de quadratura de Gauss para cálculos aproximados de integrais. Daí, segue o interesse no estudo da localização e comportamento desses zeros.

**Interpretação eletrostática, equilíbrio e equação diferencial de Lamé.** Uma outra motivação é que os zeros dos polinômios ortogonais clássicos, que são soluções de equações diferenciais de segunda ordem, possuem uma bela interpretação física. O vetor dos zeros é o ponto de equilíbrio de um campo eletrostático. Um problema geral da teoria do potencial é caracterizar os pontos de equilíbrio da energia de um campo eletrostático na presença de um campo externo. Vale mencionar que esses casos clássicos são um dos poucos exemplos em que o ponto de equilíbrio pode ser encontrado explicitamente. Assim, o estudo do comportamento dos zeros desses polinômios ortogonais revela como o equilíbrio da energia depende do campo externo. Um dos temas principais do nosso trabalho é estudar essa dependência.

Só para exemplificar, descreveremos brevemente a interpretação eletrostática dos zeros do  $n$ -ésimo polinômio de Jacobi,  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , e do  $n$ -ésimo polinômio de Laguerre,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ . Lembremos que esses polinômios são ortogonais em  $[-1, 1]$  e em  $[0, +\infty)$  com relação às medidas  $d\mu_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ ,  $\alpha, \beta > -1$ , e  $d\mu_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $\alpha > -1$ , respectivamente. Sejam, então,  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , os zeros de  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha)}(x)$  arranjados em ordem decrescente, funções dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ . T.

---

J. Stieltjes provou em [54, 55, 56] que, dadas duas cargas fixas nos pontos  $-1$  e  $1$ , com forças  $(\beta + 1)/2$  e  $(\alpha + 1)/2$ , respectivamente, e  $n$  cargas unitárias livres em  $(-1, 1)$ , a energia do campo eletrostático gerada por elas atinge um mínimo local quando as cargas unitárias estão localizadas em  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ . Aqui, o campo obedece a lei do potencial logarítmico o que significa que todas as cargas, fixas e livres, são distribuídas ao longo de fios infinitos perpendiculares ao eixo real. G. Szegő [57, Seção 6.83] provou que a energia tem um único mínimo global, o que mostra que os zeros do polinômio de Jacobi de grau  $n$  são os pontos de equilíbrio estável da energia. T. J. Stieltjes considerou também um modelo eletrostático para os polinômios clássicos de Laguerre. Fixemos, então, uma carga de força  $(\alpha + 1)/2$  na origem e consideremos  $n$  cargas unitárias livres em  $(0, +\infty)$ . A fim de evitar que essas cargas livres se movam para o infinito, impomos que a média aritmética seja limitada, isto é,  $\sum_{k=1}^n x_k/n \leq K$ , para algum  $K > 0$ . Então, a única posição para a qual a energia do campo tem um mínimo global é nos zeros de  $L_n^{(\alpha)}(c_n x)$ , com  $c_n = (n + \alpha)/K$ . A. Markov [46] (ver, também, G. Szegő [57, Teorema 6.12.1]) provou que todos os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $\beta$  e decrescentes de  $\alpha$  e, também, que os zeros  $x_{n,k}(\alpha)$  crescem com  $\alpha$ . Isso fica intuitivamente claro das interpretações eletrostáticas apresentadas acima uma vez que todas as cargas são positivas e se repelem.

Uma questão interessante é saber com que velocidade esses zeros crescem ou decrescem quando os parâmetros crescem de  $-1$  a  $+\infty$ . Nossos resultados sobre os zeros dos polinômios de Jacobi e Laguerre com relação a essa questão foram inspirados na solução completa do problema correspondente sobre a velocidade de decrescimento dos zeros positivos  $x_{n,k}(\lambda)$  dos polinômios de Gegenbauer  $C_n^\lambda(x)$ , considerados como funções de  $\lambda$ , para  $\lambda > -1/2$ . A solução veio depois de uma série de artigos, publicados ao longo de 25 anos, nos quais várias conjecturas e contribuições foram feitas. Observe que, para responder com que velocidade  $x_{n,k}(\lambda)$  decresce com  $\lambda$ , é necessário calcular a derivada  $dx_{n,k}(\lambda)/d\lambda$  e isso implica em calcular explicitamente todos os zeros de todos os polinômios  $C_n^\lambda(x)$ , o que é impossível. Então, o seguinte problema foi investigado: Se os zeros de  $C_n^\lambda(x)$  são arranjados em ordem decrescente, qual é a função extrema  $f_n(\lambda)$  que força as funções  $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, \dots, [n/2]$ , a crescerem? O exato significado de “extrema” está descrito na Seção

2.3. O primeiro a colocar tal questão para os zeros positivos de  $C_n^\lambda(x)$  foi A. Laforgia que conjecturou, em [41], que  $\lambda x_{n,k}(\lambda)$  cresce para  $\lambda > 0$ . A. Laforgia estabeleceu esse resultado para  $\lambda \in (0, 1)$  em [40]. Mais tarde, M. E. H. Ismail e J. Letessier [34] refinaram a conjectura com a função que possui o comportamento assintótico preciso,  $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ . Finalmente, R. A. Askey sugeriu que a função extrema e universal, isto é, que não depende de  $n$ , seria  $f(\lambda) = \sqrt{\lambda + 1}$ . Várias outras contribuições para o problema foram feitas por R. Spigler [53], S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler [1], E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas [31], D. K. Dimitrov [13], enquanto que, em 1999, A. Elbert e P. D. Siafarikas [24] provaram que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $k = 1, \dots, [n/2]$ ,

$$(\lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2))^{1/2} x_{n,k}(\lambda) \quad \text{cresce para } \lambda > -1/2, \quad (1.1)$$

estendendo o resultado de S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler [1] e, assim, provando a conjectura de M. E. H. Ismail, J. Letessier e R. A. Askey [33, 34]. Finalmente, em 2002, D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues [19] provaram que a função  $(\lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2))^{1/2}$  é assintoticamente extrema no sentido que não existe nenhuma outra função que cresce mais lentamente do que essa e força os produtos  $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$  a crescerem com  $\lambda$ , ou seja, o resultado obtido por A. Elbert e P. D. Siafarikas não pode ser melhorado. Essas contribuições ajudaram a conhecer o comportamento dos zeros dos polinômios de Gegenbauer mais profundamente.

Entretanto, o correspondente problema sobre o comportamento dos zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  dos polinômios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  permanecia em aberto, apesar do interesse dos especialistas em Funções Especiais. Uma das possíveis razões para a falta de resultados nessa direção é que  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  muda de sinal. Isso indica que, ao invés de considerarmos os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , é mais razoável investigar as quantidades  $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$  ou  $1 + x_{n,k}(\alpha, \beta)$ , pois elas já não mudam de sinal. Além disso, uma cuidadosa inspeção na evolução das conjecturas e resultados com relação aos zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer, descritos acima, nos leva à conclusão de que, a fim de obter resultados precisos para pelo menos valores grandes dos parâmetros, quantidades que obedecem a comportamentos assintóticos, quando os parâmetros divergem, devem ser considerados. Uma fórmula assintótica para os zeros dos polinômios de Gegenbauer é  $\sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) \rightarrow h_{n,k}$ , com  $h_{n,k}$  denotando os

zeros do polinômio de Hermite  $H_n(x)$ . Uma fórmula desse tipo para os zeros do polinômio de Jacobi é

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) = 2x_{n,n-k+1}(\alpha),$$

com  $x_{n,j}(\alpha)$  denotando os zeros do  $n$ -ésimo polinômio de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$ . Depois dessas observações, descobrimos a correta abordagem para o problema dos zeros de Jacobi e os resultados obtidos foram publicados em [17]. Provamos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $k = 1, \dots, n$ , os produtos

$$\left( \beta + \frac{2n^2 + (2n+1)(\alpha+1)}{2n+\alpha+1} \right) (1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) \text{ crescem com } \beta \in (-1, \infty), \quad (1.2)$$

considerando este produto com função de  $\beta$ . Como consequência, a desigualdade

$$\{2n(n+\alpha+\beta+1) + (\alpha+1)(\beta+1)\}(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) < 2(2n+\alpha+1)x_{n,n-k+1}(\alpha)$$

é válida para todo  $k = 1, \dots, n$ .

Permanecia, ainda, em aberto a questão sobre os zeros  $x_{n,k}(\alpha)$  do  $n$ -ésimo polinômio de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$ . Note que (1.1) e (1.2) foram motivadas pelas fórmulas assintóticas  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}$  e  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) = 2x_{n,n-k+1}(\alpha)$ , respectivamente. Observe que essas fórmulas mostram que as funções (1.1) e (1.2) possuem assíntotas horizontais quando as variáveis  $\lambda$  e  $\beta$  tendem ao infinito. Nossos resultados sobre os zeros  $x_{n,k}(\alpha)$  do polinômio de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  foram inspirados na fórmula assintótica

$$x_{n,k}(\alpha) \rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha}h_{n,k} + \frac{1}{3}(1 + 2n + 2h_{n,k}^2) + \mathcal{O}(1/\sqrt{\alpha}), \text{ quando } \alpha \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

dada por F. Calogero [11] em 1978. Observe que E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas [32] provaram que  $x_{n,1}(\alpha)/(\alpha+1)$  decresce com  $\alpha$  para  $\alpha > -1$ . Isso e (1.3) implicam que  $x_{n,1}(\alpha) > (\alpha+1)$ , o que é, infelizmente, uma desigualdade que segue também de  $x_{1,1}(\alpha) = \alpha+1$  e da propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios ortogonais. P. Natalini e B. Palumbo [49] provaram que, para quaisquer valores de  $n$  e  $k$ , as funções  $x_{n,k}(\alpha)/(2n+\alpha+1)$  são funções crescentes de  $\alpha$ , para  $\alpha \in (-1, \infty)$ . Além disso, eles estabeleceram dois resultados adicionais sobre a monotonicidade de quocientes da forma  $x_{n,k}(\alpha)/\alpha^p$ , com  $p$  fixo e  $2 \leq p \leq 2n+1$ .



Provamos o seguinte resultado que foi publicado em [18]: para todo  $n \geq 2$  e cada  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , as quantidades

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha - 1)}{\sqrt{2(n + \alpha - 1)}}$$

são funções crescentes de  $\alpha$  para  $\alpha \geq -1/(n - 1)$ . Além disso, quando  $k = 1$ , a função acima cresce para todo  $\alpha \in (-1, \infty)$ .

De (1.3), temos a fórmula assintótica

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha - 1)}{\sqrt{2(n + \alpha - 1)}} \rightarrow h_{n,k} \quad \text{quando} \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Concluimos, então, que a desigualdade

$$x_{n,k}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + \sqrt{2(n + \alpha - 1)} h_{n,k}$$

é válida para todo  $n \geq 2$ ,  $k = 1, \dots, n$  e qualquer  $\alpha \geq -1/(n - 1)$ . Além disso,

$$x_{n,1}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + \sqrt{2(n + \alpha - 1)} h_{n,1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha > -1$ . Foi provado por D. K. Dimitrov e G. Nikolov em [16] que  $h_{n,1} \leq \sqrt{2n - 4}$  para  $n \geq 2$ . Isso implica que a desigualdade

$$x_{n,1}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + 2\sqrt{(n - 2)(n + \alpha - 1)}$$

é válida para todo  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1$ . Esse limite superior para  $x_{n,1}(\alpha)$  é melhor do que aquele obtido por M. E. H. Ismail e X. Li em [35].

Agora, consideremos os polinômios ortogonais com relação a produtos escalares do tipo Sobolev generalizado

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Sigma} p(x)q(x)d\mu(x) + \sum_{i=0}^k M_i p^{(i)}(c)q^{(i)}(c), \quad (1.4)$$

com  $\mu$  sendo uma medida de Borel positiva com suporte  $\Sigma$ , um subconjunto infinito da reta real,  $M_i > 0$  para todo  $i = 0, 1, \dots, k$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Nos últimos 30 anos, vários autores (ver, por exemplo, M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola e A. Ronveaux [5]) têm estudado polinômios ortogonais com relação a produtos da forma (1.4). Um dos temas que se destaca

é a localização dos zeros desses polinômios com relação a envoltura convexa de  $\Sigma$ . Para o caso em que  $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ ,  $d\mu(x) = x^\alpha e^{-x} dx$  ou  $d\mu(x) = e^{-x^2} dx$ , esses polinômios ortogonais são chamados de tipo Jacobi-Sobolev generalizado, tipo Laguerre-Sobolev generalizado e tipo Hermite-Sobolev generalizado, respectivamente. Em particular, essas questões foram consideradas por M. Alfaro, F. Marcellán e M. L. Rezola em [4] quando  $d\mu(x)$  é a medida de Jacobi e  $c = 1$ , por R. Álvarez-Nodarse e J. J. Moreno-Balcázar em [7] e F. Marcellán e J. J. Moreno-Balcázar em [42] quando  $d\mu(x)$  é a medida de Laguerre e  $c = 0$  e, por último, M. Alfaro, J. J. Moreno-Balcázar, A. Peña e M. L. Rezola [6] estudaram o caso em que  $d\mu(x)$  é a medida de Hermite e  $c = 0$ .

Nosso estudo consiste na localização dos zeros dos polinômios do tipo Jacobi-Sobolev generalizado  $\{P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , dos zeros dos polinômios do tipo Laguerre-Sobolev generalizado  $\{L_n^{(\alpha,M,N)}(x)\}_{n \geq 0}$  e dos zeros dos polinômios do tipo Hermite-Sobolev generalizado  $\{H_n^{(\alpha,M_0,M_1,M_2,M_3)}(x)\}_{n \geq 0}$ , ortogonais com relação aos produtos escalares

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1) + Np'(1)q'(1), \quad (1.5)$$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + Np'(0)q'(0) \quad (1.6)$$

e

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + \sum_{i=0}^3 M_i p^{(i)}(0)q^{(i)}(0), \quad (1.7)$$

respectivamente. Provamos que os zeros desses polinômios se entrelaçam com os zeros dos polinômios clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite e, além disso, mostramos que há pelo menos  $n-1$  zeros de  $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha,M,N)}(x)$  em  $(-1, 1)$  e  $(0, +\infty)$ , respectivamente, e que esse fato depende apenas da massa  $N$  independentemente do valor da massa  $M$ , e que  $H_n^{(\alpha,M_0,M_1,M_2,M_3)}(x)$  pode ter um par de zeros complexos localizados no eixo imaginário, dependendo apenas dos valores das massas  $M_2$  e  $M_3$  (ver [14], [15] e [44]).

Só para exemplificar, sejam  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  os zeros de  $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x)$  arranjados em ordem crescente. Mostramos que as desigualdades

$$-1 < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}^{M,N}(\alpha, \beta) < \cdots < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta)$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\alpha, \beta > -1$  e  $M, N > 0$ . Além disso, para todo  $n$  fixo, o maior zero  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta)$  satisfaz

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) < 1, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) = 1, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) > 1, \quad \text{para } N > N_0,$$

com  $N_0$  dado por

$$N_0 = N_0(n; \alpha, \beta) = \frac{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{(n - 1)(n + \beta)(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 2)A}$$

e

$$A = \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n)}.$$

Resultados análogos como esse foram obtidos para os zeros dos polinômios  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$  e  $H_n^{(\alpha, M_0, M_1, M_2, M_3)}(x)$ .

Alguns casos particulares desses produtos escalares também foram considerados. Fazendo  $N = 0$  em (1.5) e (1.6) e  $M_0 = M$  e  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$  em (1.7), obtemos que:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx + Mp(1)q(1), \quad (1.8)$$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) \quad (1.9)$$

e

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + Mp(0)q(0). \quad (1.10)$$

Os novos polinômios ortogonais que surgem de (1.8), (1.9) e (1.10) são chamados de tipo Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x)$ , tipo Laguerre  $L_n^{(\alpha, M)}(x)$  e tipo Hermite  $H_n^{(\alpha, M)}(x)$ , respectivamente. Vários trabalhos foram publicados nos últimos anos sobre os zeros dessas três famílias de polinômios ortogonais. Citamos as contribuições de T. H. Koornwinder [39], F. Marcellán e coautores [2, 20, 21, 27], F. A. Grünbaum [29] e R. Koekoek [37]. Investigamos o comportamento desses zeros quando a massa  $M$  varia. Provamos que são funções monótonas, considerando-os como funções da massa  $M$ . Além disso, mostramos que quando  $M$

---

tende ao infinito, os zeros convergem, com velocidade de ordem  $1/M$ , aos zeros de certos polinômios ortogonais clássicos. Para os zeros  $x_{n,k}^M(\alpha, \beta)$  de  $P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x)$  provamos que as desigualdades

$$x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}^M(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha + 2, \beta) < \cdots <$$

$$x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < x_{n,n-1}^M(\alpha, \beta) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^M(\alpha, \beta) < 1$$

são válidas para todo  $M > 0$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha, \beta > -1$ . Além disso, cada zero  $x_{n,k}^M(\alpha, \beta)$  é uma função crescente de  $M$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^M(\alpha, \beta) = 1, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^M(\alpha, \beta) = x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta),$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[1 - x_{n,n}^M(\alpha, \beta)] = g_n(\alpha, \beta)$$

e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta) - x_{n,k}^M(\alpha, \beta)] = \frac{[1 + x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta)] g_n(\alpha, \beta)}{2(\alpha + 2)},$$

com

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(n + \beta)(n + \alpha + 1)A}.$$

Para os zeros dos polinômios  $L_n^{(\alpha, M)}(x)$  e  $H_n^{(\alpha, M)}(x)$ , obtivemos resultados análogos. Todas as contribuições foram obtidas através de uma cuidadosa análise do comportamento e assintótica dos zeros de polinômios da forma  $p_n(x) = h_n(x) + cg_n(x)$  como funções de  $c$ .

Por último, fazendo  $M = 0$  em (1.5) e (1.6) e  $M_1 = N$  e  $M_0 = M_2 = M_3 = 0$  em (1.7), obtemos

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Np'(1)q'(1), \quad (1.11)$$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Np'(0)q'(0) \quad (1.12)$$

e

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + Np'(0)q'(0). \quad (1.13)$$

Os polinômios ortogonais gerados pelos produtos internos (1.11), (1.12) e (1.13) são chamados de tipo Jacobi-Sobolev,  $P_n^{(\alpha,\beta,N)}(x)$ , tipo Laguerre-Sobolev,  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$ , e tipo Hermite-Sobolev,  $H_n^{(\alpha,M)}(x)$ , respectivamente. Alguns trabalhos recentes sobre os zeros desses polinômios são: [4], [22] e [38]. O entrelaçamento dos zeros desses polinômios com os zeros dos polinômios clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite e a prova de que há pelo menos  $n - 1$  zeros de  $P_n^{(\alpha,\beta,N)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$  em  $(-1, 1)$  e  $(0, +\infty)$ , respectivamente, seguem dos resultados gerais sobre os polinômios ortogonais com respeito a (1.5) e (1.6). Acrescentamos, para os zeros dos polinômios ortogonais com relação a (1.11), (1.12) e (1.13), alguns resultados novos sobre comportamento quando a massa  $N$  varia. Provamos, também, que eles são funções monótonas considerando-os como funções da massa  $N$ . Além disso, quando  $N \rightarrow \infty$ , demonstramos que estes zeros convergem com velocidade de ordem  $1/N$  para os zeros de certos polinômios ortogonais clássicos.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- O Capítulo 2 é dedicado à teoria básica de polinômios ortogonais, seus zeros e a polinômios ortogonais clássicos.
- No Capítulo 3 fornecemos alguns resultados clássicos sobre zeros, os quais faremos uso nas demonstrações dos teoremas principais.
- Ao Capítulo 4 reservamos os resultados novos obtidos sobre localização e monotonicidade dos zeros dos polinômios clássicos de Jacobi e Laguerre.
- Por último, no Capítulo 5, mostramos os resultados obtidos sobre localização, monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência dos zeros de polinômios ortogonais relacionados as medidas clássicas.

Os novos resultados foram publicados em [15], [17] e [18] e aceitos para publicação em [14] e [44].

# Capítulo 2

## Polinômios ortogonais na reta real

Neste capítulo forneceremos alguns dos conceitos básicos dos polinômios ortogonais na reta real e seus zeros. Enunciaremos alguns teoremas e introduziremos, na última seção, algumas propriedades básicas dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite. Nos referimos aos livros de T. S. Chihara [12], G. Szegő [57] e B. Simon [52] para mais informações.

### 2.1 Propriedades básicas

Seja  $\mu$  uma medida de Borel positiva com suporte  $\Sigma$ , subconjunto da reta real com uma quantidade infinita de pontos, e com momentos

$$\mu_n = \int_{\Sigma} |x|^n d\mu(x) < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Definimos o produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\langle p, q \rangle_{\mu} = \int_{\Sigma} p(x)q(x)d\mu(x), \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (2.1)$$

com  $\mathbb{P}$  sendo o espaço linear dos polinômios com coeficientes reais, e a correspondente norma  $\|\cdot\|_{\mu} : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$  por

$$\|p\|_{\mu} = \sqrt{\int_{\Sigma} |p(x)|^2 d\mu(x)}, \quad p \in \mathbb{P}. \quad (2.2)$$

Daqui para frente, sempre consideraremos  $\mu$  uma medida sob as condições anteriores.

**Definição 2.1.** *Seja  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  uma sequência de polinômios tal que*

1.  $p_n(x)$  é um polinômio de grau exatamente  $n$ ;
2.  $\langle p_n, p_m \rangle_\mu = 0$ , para  $m \neq n$ .

Neste caso, dizemos que  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  é uma **sequência de polinômios ortogonais**. Se o coeficiente  $x^n$  de  $p_n$  é 1, então dizemos **sequência de polinômios ortogonais mônicos**.

Consideremos a seguinte matriz de momentos

$$H_n := \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes são conhecidas como **matrizes de Hankel** e são simétricas e definidas positivas. Como consequência, o determinante

$$\Delta_n := \det H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}$$

é sempre positivo.

**Teorema 2.1** (Existência e Unicidade). *Cada medida  $\mu$  determina unicamente uma sequência de polinômios ortonormais  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ . Além disso,*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

com  $\gamma_n = \sqrt{\Delta_{n-1}/\Delta_n}$  sendo o coeficiente de  $x^n$  de  $p_n(x)$ .

**Teorema 2.2** (Norma Quadrática Mínima). *Seja  $p_n(x)$  o  $n$ -ésimo polinômio ortogonal mônico com relação a uma medida  $\mu$  e seja  $q_n(x)$  um polinômio mônico de grau  $n$  qualquer. Então,*

$$\|q_n\|_\mu \geq \|p_n\|_\mu.$$

*A igualdade é atingida quando  $q_n \equiv p_n$ .*

A representação desses polinômios em termos de matrizes de Hankel não é muito útil uma vez que, para explicitá-los, necessitamos calcular determinantes. Em geral, para polinômios ortonormais, usamos uma relação de recorrência de três termos.

**Teorema 2.3** (Relação de Recorrência). *Uma sequência de polinômios ortonormais  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ , com  $p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \dots$ , satisfaz uma relação de recorrência de três termos*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

*com condições iniciais  $p_{-1}(x) := 0$  e  $p_0(x) := 1/\sqrt{\mu_0}$ . Os coeficientes de recorrência são dados por*

$$a_n = \int xp_{n-1}(x)p_n(x)d\mu(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0, \quad (2.5)$$

$$b_n = \int xp_n^2(x)d\mu(x) = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}. \quad (2.6)$$

*Os polinômios ortogonais mônicos  $\hat{p}_n(x) = p_n(x)/\gamma_n$  satisfazem a relação de recorrência de três termos*

$$\hat{p}_{n+1}(x) = (x - b_n)\hat{p}_n(x) - a_n^2\hat{p}_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

*com condições iniciais  $\hat{p}_{-1}(x) := 0$  e  $\hat{p}_0(x) := 1$ .*

Essas relações de recorrência podem ser expressas em forma matricial. Por exemplo, de (2.4) segue que

$$J_\infty \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix},$$



com

$$J_{\infty} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

sendo uma matriz infinita, conhecida como **matriz de Jacobi**.

No teorema anterior também vale a recíproca, que é conhecida como Teorema de Favard [25, 1935].

**Teorema 2.4** (J. Favard, 1935). *Seja  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  uma sequência de polinômios gerada por uma relação de recorrência da forma (2.4) com  $a_{n+1} > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ . Então, existe uma medida  $\mu$  com relação a qual esta sequência é ortonormal.*

Da relação de recorrência (2.4) podemos obter fórmulas que são muito úteis. Por exemplo, a identidade de Christoffel-Darboux e sua forma confluenta.

**Teorema 2.5** (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  uma sequência de polinômios ortonormais. Então,*

$$K_{n-1}(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(y) = a_n \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x - y}. \quad (2.8)$$

A função  $K_n(x, y)$  é chamada de **núcleo de reprodução** e desenvolve um papel importante na teoria dos polinômios ortogonais.

Fazendo  $y \rightarrow x$  em (2.8) obtemos a forma confluenta da identidade de Christoffel-Darboux.

**Corolário 2.1.** *Sob as mesmas condições do teorema anterior, temos*

$$K_{n-1}(x, x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = a_n \{p'_n(x)p_{n-1}(x) - p'_{n-1}(x)p_n(x)\} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

## 2.2 Algumas propriedades básicas dos zeros

Esta seção é dedicada aos zeros de polinômios ortogonais. Eles possuem propriedades bonitas. Descreveremos algumas delas.

Denotemos por  $C_0(\Sigma)$  o menor intervalo da reta real que contém  $\Sigma$  (o envoltório convexo de  $\Sigma$ ).

**Teorema 2.6.** *Seja  $\widehat{p}_n(x)$  o  $n$ -ésimo polinômio ortogonal mônico relacionado com uma medida  $\mu$ . Então, todos os zeros de  $\widehat{p}_n(x)$  são reais, simples e estão no interior de  $C_0(\Sigma)$ .*

*Demonstração.* Suponha que existam  $k$  zeros  $x_1, \dots, x_k$  de  $\widehat{p}_n(x)$  fora de  $C_0(\Sigma)$ . Então,  $\widehat{p}_n(x)/(x - x_1) \cdots (x - x_k)$  é um polinômio de grau  $n - k$  com todos os zeros em  $C_0(\Sigma)$ . Se  $k > 0$  então, pela ortogonalidade,

$$\int_{\Sigma} \frac{\widehat{p}_n^2(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_k)} d\mu(x) = 0.$$

Por outro lado,  $\widehat{p}_n^2(x)/(x - x_1) \cdots (x - x_k)$  não muda de sinal em  $C_0(\Sigma)$  e, portanto, essa integral não pode se anular. Logo,  $k$  não pode ser maior do que zero, ou seja,  $k = 0$  e, assim, todos os zeros de  $\widehat{p}_n(x)$  são reais e estão em  $C_0(\Sigma)$ . Se  $x_0$  é um zero de  $\widehat{p}_n(x)$  de multiplicidade maior que 1, então  $\widehat{p}_n(x)/(x - x_0)^2$  é um polinômio de grau  $n - 2$  e, pela ortogonalidade,

$$\int_a^b \frac{\widehat{p}_n^2(x)}{(x - x_0)^2} d\mu(x) = 0.$$

Mas  $\widehat{p}_n^2(x)/(x - x_0)^2$  é positivo em  $C_0(\Sigma)$  e, portanto, essa integral não pode se anular. Logo, todos os zeros de  $\widehat{p}_n(x)$  são simples.  $\square$

Uma outra forma de mostrar que os zeros são reais é usando a relação de recorrência para os polinômios ortonormais. Escrevendo (2.4) em forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} - a_n p_n(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, se  $x_{n,k}$  é um zero de  $p_n(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , então  $x_{n,k}$  é um autovalor da matriz

$$J_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

com autovetor

$$\begin{pmatrix} p_0(x_{n,k}) \\ p_1(x_{n,k}) \\ p_2(x_{n,k}) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x_{n,k}) \\ p_{n-1}(x_{n,k}) \end{pmatrix}.$$

A matriz  $J_n$  é tridiagonal e simétrica e é conhecida como matriz (finita) de Jacobi. A simetria de  $J_n$  implica que os autovalores (zeros) são reais. A simplicidade dos zeros também segue da relação de recorrência considerando a forma confluenta da identidade de Christoffel-Darboux (2.9). Se  $x_0$  é um zero de  $p_n(x)$  de multiplicidade maior do que 1, então (2.9) implica que

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x_0) = 0,$$

o que é impossível desde que  $p_0(x_0)$  é uma constante não nula.

**Teorema 2.7.** *Seja  $\{\widehat{p}_n(x)\}_{n \geq 0}$  uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a uma medida  $\mu$  e suponha que exista um subconjunto  $(\alpha, \beta) \subset C_0(\Sigma)$  com  $(\alpha, \beta) \cap \Sigma =$*

$\emptyset$ . Então,  $(\alpha, \beta)$  contém no máximo um zero de  $\widehat{p}_n(x)$ .

Esse último teorema diz que a maior parte dos zeros estão no suporte  $\Sigma$  da medida  $\mu$ .

**Teorema 2.8.** *Seja  $p_n(x)$  o  $n$ -ésimo polinômio ortonormal com relação a uma medida  $\mu$  e sejam  $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$  seus zeros. Então,*

$$x_{n,k} < x_{n-1,k} < x_{n,k+1}.$$

*Em outras palavras, os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n-1}(x)$  se entrelaçam.*

### Fórmulas de Quadratura Gaussianas

Quadraturas numéricas consistem em aproximar a integral de uma função  $f$

$$I(f) = \int_{\Sigma} f(x) d\mu(x)$$

por uma soma finita que usa somente  $n$  valores da função

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

Dizemos que  $I_n$  é interpolatória quando  $Q_n(p) = I(p)$  para todo polinômio  $p(x)$  de grau  $n - 1$ . Além disso, o grau de precisão algébrica de uma fórmula de quadratura é  $k$  quando  $Q_n(p) = I(p)$  para todo polinômio  $p(x)$  de grau  $k$ , mas  $Q_n(q) \neq I(q)$  para algum polinômio  $q(x)$  de grau  $k + 1$ .

O polinômio interpolador de Lagrange é dado por

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n l_{n,k}(x) f(x_{n,k}), \quad (2.10)$$

com  $l_{n,k}(x)$  denotando os polinômios básicos de interpolação dados por

$$l_{n,k}(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x)(x - x_{n,k})}, \quad \omega(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{n,j}). \quad (2.11)$$

Desde que  $l_{n,k}(x)$  é de grau  $n - 1$ , então  $L_n(f; x)$  também é um polinômio de grau  $n - 1$ . Além disso,  $l_{n,k}(x_{n,j}) = \delta_{j,k}$  e isso implica que  $L_n(f; x_{n,j}) = f(x_{n,j})$ , ou seja,  $L_n(f; x)$  interpola  $f(x)$  nos nós  $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ .

**Teorema 2.9.** *A fórmula de quadratura  $Q_n$  é interpolatória se, e somente se,  $\lambda_{n,k} = I(l_{n,k})$ , isto é,*

$$\lambda_{n,k} = \int_{\Sigma} l_{n,k}(x) d\mu(x).$$

Esse último teorema nos diz que quadraturas interpolatórias sempre têm grau de precisão algébrica  $\geq n - 1$  e vice-versa, se uma fórmula de quadratura possui grau de precisão algébrica  $\geq n - 1$ , então ela é interpolatória. O próximo resultado mostra que, escolhendo os nós da fórmula de quadratura como sendo os zeros do  $n$ -ésimo polinômio ortogonal relacionado com  $\mu$ , então  $Q_n$  tem o maior grau de precisão algébrica possível, isto é, exatamente  $2n - 1$ .

**Teorema 2.10** (Quadratura de Gauss-Jacobi). *Escolhendo os  $n$  nós da fórmula de quadratura como os  $n$  zeros  $x_{n,k}$  do  $n$ -ésimo polinômio ortogonal relacionado com a medida  $\mu$ , então, para todo polinômio  $q_{2n-1}(x)$  de grau menor ou igual a  $2n - 1$ ,*

$$\int q_{2n-1}(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} q_{2n-1}(x_{n,k}),$$

com os coeficientes (ou pesos) de quadratura,  $\lambda_{n,k}$ , positivos e dados por

$$\lambda_{n,k} = \lambda_n(x_{n,k}) = \frac{1}{K_{n-1}(x_{n,k}, x_{n,k})} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x_{n,k}) \right)^{-1}.$$

**Teorema 2.11.** *Entre dois zeros consecutivos de  $p_m(x)$  sempre há um zero de  $p_n(x)$  para todo  $n > m$ .*

**Teorema 2.12** (Densidade dos Zeros). *Seja  $\mu$  uma medida com suporte  $\Sigma$ . Então, todo ponto de  $\Sigma$  atrai zeros. Em outras palavras, dado  $x_0 \in \Sigma$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N_0$ ,  $p_n(x)$  tem pelo menos um zero em  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , ou seja, os zeros são densos em  $\Sigma$ .*

## 2.3 Polinômios ortogonais clássicos

Nesta seção forneceremos algumas propriedades dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite.

### 2.3.1 Polinômios ortogonais de Jacobi

Seja  $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n \geq 0}$ , com  $\alpha, \beta > -1$ , a sequência de **polinômios ortogonais de Jacobi**. Descreveremos algumas das propriedades desses polinômios.

1. Fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left( \frac{d}{dx} \right)^n ((1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}). \quad (2.12)$$

2. Representação em série:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} x^n + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Valor no ponto  $x = 1$ :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}. \quad (2.14)$$

4. Relação de simetria:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x). \quad (2.15)$$

5. Relação de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle_{\alpha,\beta} &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= d_n(\alpha, \beta) \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

com

$$d_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

6. Relação de recorrência de três termos:

$$\begin{aligned} P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= 0, \quad P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, \\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= (\gamma_n x - \beta_n) P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_n P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.17)$$

com

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)}, \\ \beta_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(\beta^2-\alpha^2)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}, \\ \alpha_n &= \frac{2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}. \end{aligned}$$

7. Fórmulas para a derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \\ &= \frac{-n[(2n + \alpha + \beta)x + \beta - \alpha]P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(n + \alpha)(n + \beta)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{(2n + \alpha + \beta)(1 - x^2)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

8.  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0. \quad (2.19)$$

9. A função  $u = u(x) = (1 - x)^{(\alpha+1)/2}(1 + x)^{(\beta+1)/2}P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \frac{1 - \alpha^2}{4(1 - x)^2} + \frac{1 - \beta^2}{4(1 + x)^2} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)/2}{1 - x^2} \right\} u = 0. \quad (2.20)$$

10. Representação hipergeométrica:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + 1)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1 - x}{2} \right). \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Polinômios ortogonais de Laguerre

Seja  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n \geq 0}$ ,  $\alpha > -1$ , a sequência de **polinômios ortogonais de Laguerre generalizado**. No decorrer do texto usaremos apenas a palavra Laguerre para denotar esses polinômios. Destacamos a seguir algumas de suas propriedades.

1. Fórmula de Rodrigues:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \quad (2.22)$$

2. Representação em série:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n + \alpha}{n - k} \frac{x^k}{k!} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \dots. \quad (2.23)$$

3. Valor na origem:

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n + \alpha}{n} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + 1)}. \quad (2.24)$$

4. Relação de ortogonalidade:

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle_\alpha = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^x dx = d_n(\alpha) \delta_{nm}, \quad (2.25)$$

com

$$d_n(\alpha) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.$$

5. Relação de recorrência de três termos:

$$\begin{aligned} L_{-1}^{(\alpha)}(x) &= 0, \quad L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ nL_n^{(\alpha)}(x) &= (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

6. Fórmulas para a derivada:

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{x} \{nL_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\}, \quad n \geq 1. \quad (2.27)$$

7.  $L_n^{(\alpha)}(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0. \quad (2.28)$$

8. A função  $u = u(x) = e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \frac{n + (\alpha + 1)/2}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4} \right\} u = 0. \quad (2.29)$$

9. Representação hipergeométrica:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha + 1; x). \quad (2.30)$$

10. Relação entre os polinômios de Jacobi e Laguerre:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2\beta^{-1}x) = L_n^{(\alpha)}(x). \quad (2.31)$$

11. Relação entre os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha)$  dos polinômios de Jacobi e Laguerre:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) = 2x_{n,n-k+1}(\alpha). \quad (2.32)$$



### 2.3.3 Polinômios ortogonais de Hermite

Seja  $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a sequência de **polinômios ortogonais de Hermite**. Segue abaixo algumas propriedades desses polinômios.

1. Fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (2.33)$$

2. Representação em série:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!} = 2^n x^n + \dots. \quad (2.34)$$

3. Valor na origem:

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \quad \text{e} \quad H'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}. \quad (2.35)$$

4. Relação de simetria:

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x). \quad (2.36)$$

5. Relação de ortogonalidade:

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = d_n \delta_{nm}, \quad (2.37)$$

com

$$d_n = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

6. Relação de recorrência de três termos:

$$\begin{aligned} H_{-1}(x) &= 0, \quad H_0(x) = 1, \\ H_n(x) &= 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.38)$$

7. Fórmula para a derivada:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (2.39)$$

8.  $H_n(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \quad (2.40)$$

9. Relação entre os polinômios de Laguerre e Hermite:

$$H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m! L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2),$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2).$$

10. Relação entre os polinômios de Laguerre e Hermite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-n/2} L_n^{(\alpha)}(\sqrt{\alpha}x + \alpha) = (-1)^n \frac{2^{-n/2}}{n!} H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \quad (2.41)$$

# Capítulo 3

## Alguns resultados técnicos

O objetivo deste capítulo é fornecer alguns resultados técnicos que serão utilizados nas demonstrações dos principais teoremas nos próximos capítulos.

Primeiramente, enunciaremos alguns resultados sobre zeros de soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, o Teorema de Sturm, e uma versão integral do mesmo. Na sequência, descreveremos alguns resultados sobre polinômios estáveis (ou de Hurwitz). Apresentaremos, também, alguns resultados sobre autovalores de matrizes hermitianas, o Teorema de Perron-Frobenius, e o Teorema de Hellmann-Feynman. Por último, alguns resultados sobre o comportamento e assintóticas de zeros de polinômios da forma  $p_n(x) = h_n(x) + cg_n(x)$  como funções de  $c$ .

### 3.1 Teoremas de Sturm

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Comparação de Sturm. A versão que utilizamos é a que aparece no livro de G. Szegő [57, Teorema 1.82.1].

**Teorema 3.1.** *Sejam as funções  $y(x)$  e  $Y(x)$  soluções não triviais das equações diferenciais*

$$y'' + f(x)y = 0 \quad \text{e} \quad Y'' + F(x)Y = 0$$

*e sejam  $x_1, x_2, \dots, x_m$  e  $X_1, X_2, \dots, X_m$  zeros de  $y(x)$  e  $Y(x)$ , respectivamente, em um intervalo  $I = (a, b)$ . Suponha que  $f(x)$  e  $F(x)$  são contínuas,*

$$f(x) < F(x), \quad a < x < x_m,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)] = 0. \quad (3.1)$$

Então,

$$X_k < x_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

**Corolário 3.1.** *Seja*

$$y''(x; \mu) + F(x; \mu)y(x; \mu) = 0 \quad (3.2)$$

uma família de equações diferenciais de Sturm tais que, para todo  $\mu \in (c, d)$ , a solução  $y(x; \mu)$  desta equação possui zeros  $a < \xi_1(\mu) < \dots < \xi_m(\mu) < b$  distintos. Se  $\frac{\partial F(x; \mu)}{\partial \mu}$  existe e é menor do que zero, então todos os zeros  $\xi_k = \xi_k(\mu)$  de  $y(x; \mu)$  são funções crescentes de  $\mu$ .

Enunciaremos, agora, uma versão integral para o Teorema de Comparação de Sturm. A. Elbert e M. E. Muldoon [23] obtiveram uma bonita fórmula para a derivada  $\xi'(\mu)$  de qualquer zero de uma solução  $y$  de (3.2).

**Teorema 3.2.** *Seja  $y(x, \mu)$  solução de (3.2) para cada  $x$  em um intervalo  $(a, b)$ , cada  $\mu$  em algum intervalo  $(c, d)$  e  $F(x, \mu)$  continuamente diferenciável com relação a ambas as variáveis. Então, a solução  $y = y(x, \mu)$  é também suave com relação a  $x$  e  $\mu$ , e se os zeros  $\xi = \xi(\mu)$  da solução  $y$  são distintos, então cada zero  $\xi$  é uma função suave do parâmetro  $\mu$ . Além disso, suponha que  $y(a, \mu) = 0$  ou  $y'(a, \mu) = 0$ , onde a última derivada é com relação à primeira variável. Então,*

$$\left[ \frac{dy(x, \mu)}{dx} \Big|_{x=\xi} \right]^2 \xi'(\mu) = - \int_a^\xi \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial \mu} [y(x, \mu)]^2 dx. \quad (3.3)$$

As demonstrações dos resultados desta seção encontram-se na nossa dissertação de mestrado [50].

## 3.2 Critério de Routh-Hurwitz

Nesta seção descreveremos o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz. Para um estudo mais profundo, sugerimos consultar F. R. Gantmacher [26, Capítulo 15] e M.

Marden [45, Capítulo 9]. Alguns resultados recentes sobre monotonicidade de zeros usando esse critério foram obtidos por D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues [19]. Uma boa fonte de consulta sobre esse assunto é a dissertação de mestrado de R. O. Rodrigues [51].

Seja

$$f(z) = f_n z^n + f_{n-1} z^{n-1} + f_{n-2} z^{n-2} + f_{n-3} z^{n-3} + \cdots + f_0, \quad f_n \neq 0,$$

um polinômios de grau  $n = 2m + 1$  com coeficientes reais.

**Definição 3.1.** *A matriz*

$$H(f) := \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_{n-3} & f_{n-5} & \cdots & 0 \\ f_n & f_{n-2} & f_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & f_{n-1} & f_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & f_n & f_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

é denominada *matriz de Hurwitz de grau  $2m + 1$  associada ao polinômio  $f(z)$* .

**Definição 3.2.** *O polinômio  $f(z) = f_n z^n + f_{n-1} z^{n-1} + \cdots + f_0$  com coeficientes reais  $f_j$  e com  $f_n > 0$  é chamado de polinômio de Hurwitz ou estável se todos os seus zeros possuem parte real negativa.*

**Teorema 3.3** (Critério de Routh-Hurwitz). *O polinômio  $f(z)$  é estável se, e somente se, os primeiros  $n$  menores principais da correspondente matriz de Hurwitz  $H(f)$  são positivos.*

**Definição 3.3.** *Dizemos que os polinômios  $h(z)$  e  $g(z)$  de grau  $m$  formam um par positivo se os coeficientes dos termos de maior grau são positivos e se seus zeros  $x_1, \dots, x_m$  e  $y_1, \dots, y_m$  são reais, negativos e se entrelaçam da seguinte forma:*

$$y_m < x_m < y_{m-1} < x_{m-1} < \cdots < y_1 < x_1.$$

**Teorema 3.4.** *O polinômio  $f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$  é um polinômio de Hurwitz se, e somente se,  $h(z)$  e  $g(z)$  formam um par positivo.*

Este resultado aparece como Teorema 13 na página 228 em [26].

Consideremos a sequência  $\{p_n(x; \tau)\}_{n \geq 0}$  de polinômios ortogonais parametrizados no intervalo  $x \in (c, d)$ , com  $\tau \in (p, q)$ , e com coeficientes funções contínuas de  $\tau$ . Suponhamos que o coeficiente de  $x^n$  de  $p_n(x; \tau)$  é positivo e que  $\zeta_k(\tau)$ , com

$$c < \zeta_n(\tau) < \zeta_{n-1}(\tau) < \cdots < \zeta_1(\tau) < d,$$

são os zeros de  $p_n(x; \tau)$  arranjados em ordem decrescente. Seja

$$p_n(x; \tau) = a_0(\tau) + a_1(\tau)(x - d) + \cdots + a_n(\tau)(x - d)^n, \quad a_n(\tau) > 0, \quad (3.4)$$

a expansão de Taylor de  $p_n(x; \tau)$  em  $d$ . Desde que os zeros  $\zeta_k(\tau)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , de  $p_n(x; \tau)$  são distintos e pertencem ao intervalo  $(c, d)$ , então todos os coeficientes  $a_j(\tau)$ ,  $j = 0, \dots, n$ , são positivos.

Seja  $q_n(x; \tau)$  tal que  $q_n(x; \tau) = a_0(\tau) + a_1(\tau)x + \cdots + a_n(\tau)x^n$  e  $\tilde{q}_n(x; \tau) = a_0(\tau)x^n + \cdots + a_1(\tau)x + a_n(\tau)$  seu polinômio “inverso”. Denotemos por  $H(p_n; \tau_1, \tau_2)$  a matriz de Hurwitz associada ao polinômio

$$f_{2n+1}(x; \tau_1, \tau_2) := q_n(x^2; \tau_1) + xq_n(x^2; \tau_2).$$

Então,

$$H(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) & a_{n-2}(\tau_1) & \cdots & 0 \\ a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) & a_{n-2}(\tau_2) & \cdots & 0 \\ 0 & a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) & \cdots & 0 \\ 0 & a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Analogamente,  $\tilde{H}(p_n; \tau_1, \tau_2)$  denota a matriz de Hurwitz associada com

$$f_{2n+1}^*(x; \tau_1, \tau_2) := \tilde{q}_n(x^2; \tau_1) + x\tilde{q}_n(x^2; \tau_2).$$

Logo,

$$\tilde{H}(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) & a_2(\tau_1) & \cdots & 0 \\ a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) & a_2(\tau_2) & \cdots & 0 \\ 0 & a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) & \cdots & 0 \\ 0 & a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Agora, para todo  $j$ ,  $1 \leq j \leq 2n+1$ , denotemos por  $\Delta_j(p_n; \tau_1, \tau_2)$  e  $\tilde{\Delta}_j(p_n; \tau_1, \tau_2)$  o  $j$ -ésimo menor principal de  $H(p_n; \tau_1, \tau_2)$  e  $\tilde{H}(p_n; \tau_1, \tau_2)$ , respectivamente. Para os primeiros três, temos

$$\Delta_1(p_n; \tau_1, \tau_2) = a_n(\tau_1), \quad \Delta_2(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) \\ a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) & a_{n-2}(\tau_1) \\ a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) & a_{n-2}(\tau_2) \\ 0 & a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\Delta}_1(p_n; \tau_1, \tau_2) = a_0(\tau_1), \quad \tilde{\Delta}_2(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) \\ a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\Delta}_3(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) & a_2(\tau_1) \\ a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) & a_2(\tau_2) \\ 0 & a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) \end{vmatrix}.$$

Assim, podemos formular um dos principais resultado de [19].

**Teorema 3.5.** *Seja o coeficiente  $a_k(\tau)$ , na representação (3.4) do polinômio parametrizado  $p_n(x; \tau)$ , função contínua com relação a  $\tau$ . Então,*

(i) *as desigualdades*

$$\zeta_k(\tau_2) < \zeta_k(\tau_1), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

*são válidas para todo  $\tau_2$  em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\tau_1$  se, e somente se,  $\Delta_j(p_n, \tau_1, \tau_2) > 0$  para  $j = 1, \dots, 2n+1$ ;*

(ii) *as desigualdades*

$$\zeta_k(\tau_1) < \zeta_k(\tau_2), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

*são válidas para todo  $\tau_2$  em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\tau_1$  se, e somente se,  $\tilde{\Delta}_j(p_n, \tau_1, \tau_2) > 0$  para  $j = 1, \dots, 2n+1$ .*

### 3.3 Teoremas de Perron-Frobenius e Hellmann-Feynman

Esta seção é dedicada a alguns resultados sobre autovalores de matrizes hermitianas. Iniciaremos com o Teorema de Perron-Frobenius que pode ser encontrado no livro de R. Horn e C. Johnson [30].

**Teorema 3.6** (Perron-Frobenius). *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes tridiagonais  $n \times n$  com entradas todas positivas. Se as entradas de  $B - A$  são não negativas, então o maior autovalor de  $B$  é maior que o maior autovalor de  $A$ .*

Podemos relaxar as hipóteses do teorema anterior permitindo que as entradas da diagonal sejam apenas reais.

**Corolário 3.2.** *Seja  $H(\tau)$  uma matriz tridiagonal  $n \times n$ . Se suas entradas são funções diferenciáveis de  $\tau$  e, ademais, elas são funções crescentes de  $\tau$ , então o maior autovalor de  $H(\tau)$  também é função crescente de  $\tau$ . Em outras palavras, se  $\partial H(\tau)/\partial \tau$  é não negativa, então o maior autovalor de  $H(\tau)$  é função crescente de  $\tau$ .*

A seguir apresentaremos o Teorema de Hellmann-Feynman na versão dada por M. E. H. Ismail e R. Zhang [36].

**Teorema 3.7** (Hellmann-Feynman). *Seja  $H(\tau)$  uma matriz hermitiana  $n \times n$  com todas as entradas continuamente diferenciáveis com relação a um parâmetro  $\tau$ , para  $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ . Sejam  $\lambda_1(\tau) < \lambda_2(\tau) < \dots < \lambda_n(\tau)$  os autovalores de  $H(\tau)$  com correspondentes autovetores  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_n(\tau)$ . Se  $\partial H(\tau)/\partial \tau$  é a matriz formada pela derivada das entradas de  $H(\tau)$ , então*

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \tau} = \frac{u_j^t (\partial H(\tau)/\partial \tau) u_j}{u_j^t u_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Corolário 3.3.** *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, se a matriz  $\partial H(\tau)/\partial \tau$  é definida positiva (negativa), então o  $j$ -ésimo autovalor de  $H(\tau)$  é uma função estritamente crescente (decrescente) de  $\tau$ ,  $j = 1, \dots, n$ .*

Note que se trocamos “positiva” (“negativa”) no corolário anterior por “não-negativa” (“não-positiva”) concluímos que os autovalores são funções crescentes (decrescentes) de  $\tau$  (não são estritamente).



**Corolário 3.4.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes hermitianas  $n \times n$  com autovalores  $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$  e  $\lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B)$ . Se  $B - A$  é uma matriz definida positiva, então  $\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Não é difícil ver que o Teorema 3.7 e o Corolário 3.4 são equivalentes.

**Teorema 3.8.** *Sejam  $A = (a_{i,j})$  e  $B = (b_{i,j})$  matrizes tridiagonais  $n \times n$ . Se  $A$  é definida positiva e se*

$$\frac{b_{i,i}^2}{b_{i,i}b_{i+1,i+1}} \leq \frac{a_{i,i+1}^2}{a_{i,i}a_{i+1,i+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2,$$

*então  $B$  também é definida positiva.*

Uma prova deste último teorema pode ser encontrada em [36].

### 3.4 Zeros de polinômios da forma $f(x) = h_n(x) + cg_n(x)$

O próximo resultado trata do comportamento dos zeros de uma combinação linear de dois polinômios com zeros que se entrelaçam (ver [10, Lema 1] e [15, Lema 3]).

**Teorema 3.9.** *Sejam  $h_n(x) = a(x - x_1) \cdots (x - x_n)$  e  $g_n(x) = b(x - \zeta_1) \cdots (x - \zeta_n)$  polinômios com coeficientes reais e com zeros que se entrelaçam, sendo  $a$  e  $b$  constantes reais e positivas.*

(i) *Se  $\zeta_1 < x_1 < \dots < \zeta_n < x_n$ , então, para todo  $c > 0$ , o polinômio*

$$f(x) = h_n(x) + cg_n(x)$$

*tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  da seguinte forma:*

$$\zeta_1 < \eta_1 < x_1 < \dots < \zeta_n < \eta_n < x_n. \quad (3.7)$$

*Além disso, cada  $\eta_k = \eta_k(c)$  é uma função decrescente de  $c$  e, para todo  $k = 1, \dots, n$ ,*

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \eta_k = \zeta_k \quad e \quad \lim_{c \rightarrow \infty} c[\eta_k - \zeta_k] = \frac{h_n(\zeta_k)}{g'_n(\zeta_k)}. \quad (3.8)$$

(ii) Se  $x_1 < \zeta_1 < \cdots < x_n < \zeta_n$ , então, para toda constante  $c > 0$ , o polinômio

$$f(x) = h_n(x) + cg_n(x)$$

tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \cdots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  da seguinte forma:

$$x_1 < \eta_1 < \zeta_1 < \cdots < x_n < \eta_n < \zeta_n. \quad (3.9)$$

Além disso, cada  $\eta_k = \eta_k(c)$  é uma função crescente de  $c$  e, para todo  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \eta_k = \zeta_k \quad e \quad \lim_{c \rightarrow \infty} c[\zeta_k - \eta_k] = \frac{h_n(\zeta_k)}{g'_n(\zeta_k)}. \quad (3.10)$$

*Demonstração.* Demonstraremos aqui apenas (ii) pois a prova de (i) é equivalente. Uma vez que  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  são polinômios mônicos e  $x_1 < \zeta_1 < \cdots < x_n < \zeta_n$  temos

$$\text{sign} f(x_k) = \text{sign} g_n(x_k) = (-1)^{n-k+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Daí, existem  $n - 1$  zeros  $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$  de  $f(x)$  tais que

$$x_1 < \eta_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < \eta_{n-1} < x_n.$$

A existência de  $\eta_n > x_n$  segue de  $f(x_n) < 0$  e do fato de que  $f(x) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Usando raciocínio análogo, provamos que

$$\eta_1 < \zeta_1 < \cdots < \eta_n < \zeta_n$$

e, assim, concluimos que (3.9) vale.

Para provar a monotonicidade dos zeros de  $f(x)$  com relação a  $c$ , definamos o polinômio  $f_\varepsilon(x)$  por

$$f_\varepsilon(x) = h_n(x) + (c + \varepsilon)g_n(x),$$

com  $\varepsilon \geq 0$ , e denotemos os seus zeros por  $\eta_1(\varepsilon) < \cdots < \eta_n(\varepsilon)$ . É fácil ver que  $\eta_k = \eta_k(0)$  e

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon g_n(x).$$

Portanto,  $f_\varepsilon(\eta_k) = \varepsilon g_n(\eta_k)$  e, então, para  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{sign} f_\varepsilon(\eta_k) = \text{sign} g_n(\eta_k) = (-1)^{n-k+1} \quad (3.11)$$

por causa da propriedade de entrelaçamento (3.9). Assim,  $\eta_k < \eta_k(\varepsilon)$ , ou em outras palavras, cada zero  $\eta_k$  é uma função crescente de  $c$ .

Para estabelecermos os limites (3.10), definamos o polinômio  $q(x)$  por

$$q(x) = \frac{1}{c}h_n(x) + g_n(x).$$

Note que os zeros de  $f(x)$  e  $q(x)$  coincidem para todo  $c$ . Uma vez que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} q(x) = g_n(x),$$

pelo Teorema de Hurwitz (ver [57, p. 22]), os zeros  $\eta_k$  de  $f(x)$  convergem para os zeros  $\zeta_k$  de  $g_n(x)$  quando  $c$  tende para o infinito. Agora, pelo Teorema do Valor Médio, existem números reais  $\theta_k \in (\eta_k, \zeta_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , tais que

$$\frac{cg_n(\zeta_k) - cg_n(\eta_k)}{\zeta_k - \eta_k} = cg'_n(\theta_k)$$

ou, equivalentemente,

$$c[\zeta_k - \eta_k] = \frac{h_n(\eta_k)}{g'_n(\theta_k)}.$$

Por outro lado,  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  são polinômios com zeros simples. Como  $g'(\zeta_k) \neq 0$ , então existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$m_k = \min \{|g'_n(x)| : x \in [\zeta_k - \delta_1, \zeta_k]\} \neq 0.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Assim, existe  $\delta_2 > 0$ , com  $\delta_2 < \delta_1$ , tal que

$$|h_n(x) - h_n(\zeta_k)| < \frac{\varepsilon m_k}{2} \quad \text{e} \quad |g_n(x) - g_n(\zeta_k)| < \frac{\varepsilon m_k^2}{2|h_n(\zeta_k)|}$$

quando  $x \in [\zeta_k - \delta_2, \zeta_k]$ . Uma vez que  $\eta_k, \theta_k \rightarrow \zeta_k$  quando  $c \rightarrow \infty$ , então existe  $c_0 > 0$  tal que, para todo  $c > c_0$ ,  $\eta_k, \theta_k \in [\zeta_k - \delta_2, \zeta_k]$ . Daí, para  $c > c_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_n(\eta_k)}{g'_n(\theta_k)} - \frac{h_n(\zeta_k)}{g'_n(\zeta_k)} \right| &= \left| \frac{h_n(\eta_k)g'_n(\zeta_k) - h_n(\zeta_k)g'_n(\theta_k)}{g'_n(\theta_k)g'_n(\zeta_k)} \right| \\ &\leq |h_n(\eta_k) - h_n(\zeta_k)| \frac{1}{|g'_n(\theta_k)|} + |g'_n(\theta_k) - g'_n(\zeta_k)| \frac{|h_n(\zeta_k)|}{|g'_n(\theta_k)||g'_n(\zeta_k)|} \\ &\leq |h_n(\eta_k) - h_n(\zeta_k)| \frac{1}{m_k} + |g'_n(\theta_k) - g'_n(\zeta_k)| \frac{|h_n(\zeta_k)|}{m_k^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} c[\zeta_k - \eta_k] = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{h_n(\eta_k)}{g'_n(\theta_k)} = \frac{h_n(\zeta_k)}{g'_n(\zeta_k)},$$

completando a prova do Teorema 3.9. □

## Capítulo 4

# Zeros dos polinômios ortogonais clássicos

Neste capítulo, apresentaremos alguns fatos sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos. Na Seção 4.1 fornecemos a bela interpretação eletrostática, dada por T. J. Stieltjes, para os zeros dos polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite. Na Seção 4.2 provaremos o Teorema de A. Markov, com o qual obtemos a monotonicidade dos zeros como funções dos parâmetros. Em seguida, na Seção 4.3, enunciamos os nossos resultados sobre o comportamento dos zeros dos polinômios de Jacobi e Laguerre. Fornecemos também um histórico sobre a evolução dos problemas em questão. Por fim, na Seção 4.4 provamos os resultados enunciados na Seção 4.3.

Os resultados descritos aqui foram publicados em [17] e [18].

### 4.1 Interpretação eletrostática

Um dos fatos mais interessantes sobre os zeros dos polinômios ortogonais clássicos é que eles possuem uma bela interpretação eletrostática. O vetor dos zeros é o ponto de equilíbrio de um campo eletrostático. T. J. Stieltjes [54, 55, 56] (ver, também, Szegő [57, Seção 6.7]) obteve essa interpretação para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos ainda no final do século *XIX*. Vale mencionar que esses casos clássicos são um dos poucos

exemplos em que o ponto de equilíbrio de um campo eletrostático pode ser encontrado explicitamente.

Sejam  $n$  cargas unitárias distribuídas nos pontos  $x_1, \dots, x_n$  de um intervalo  $(a, b)$ , que pode ser finito ou infinito. Suponha que a interação dessas cargas obedece a lei do potencial logarítmico (nesse caso as cargas não são pontuais, mas sim, distribuídas uniformemente ao longo de fios infinitos, perpendiculares ao eixo real). Portanto, a força é inversamente proporcional à distância relativa entre elas. Então, a energia da interação mútua dessas cargas é dada por

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln \frac{1}{|x_k - x_j|}.$$

Um ponto  $x = (x_1, \dots, x_n)$  onde o mínimo local de  $E$  é atingido é chamado de ponto de equilíbrio eletrostático local. A relação desses pontos com os zeros dos polinômios ortogonais foi observada por T. J. Stieltjes. Ele observou que os mínimos locais da energia de certos campos eletrostáticos na presença de cargas adicionais fixas coincidem com os vetores dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos.

### Zeros dos polinômios de Jacobi

Iniciaremos com a interpretação eletrostática dos zeros dos polinômios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Suponha que duas cargas fixas com forças  $p > 0$  e  $q > 0$  distribuídas uniformemente ao longo de fios infinitos perpendiculares ao eixo real nos pontos  $-1$  e  $1$ , respectivamente. Então, a energia do “campo externo” criada pelas cargas fixas é dada por

$$\varphi(x) = p \ln \frac{1}{|x + 1|} + q \ln \frac{1}{|x - 1|}.$$

Agora, suponha que sejam introduzidas  $n$  cargas unitárias em  $(-1, 1)$  e que essas cargas unitárias interagem com as cargas em  $-1$  e  $1$  de acordo com a lei do potencial logarítmico, conforme descrito anteriormente. Então, a energia total  $E_T(x_1, \dots, x_n)$  desse campo é dada por

$$E_T(x_1, \dots, x_n) = E(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k).$$

Em outras palavras,

$$E_T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln \frac{1}{|x_k - x_j|} + p \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{|x_k + 1|} + q \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{|x_k - 1|}. \quad (4.1)$$

T. J. Stieltjes provou em [54, 55, 56] que  $E_T$  atinge um mínimo local quando as cargas unitárias estão localizadas nos zeros de  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$  e G. Szegő [57, Seção 6.83] provou que a energia tem de fato um único mínimo global, o que mostra que os zeros do polinômio de Jacobi de grau  $n$  são os pontos de equilíbrio estável da energia. Para enunciarmos formalmente estes resultados denotamos por  $\Xi$  o simplexo

$$\Xi := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

**Teorema 4.1** (T. J. Stieltjes e G. Szegő). *A função  $E_T(x_1, \dots, x_n)$  definida por (4.1) possui um único ponto de mínimo  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  em  $\Xi$ . Além disso, as coordenadas de  $x^*$  coincidem com os zeros de  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$ , isto é,  $x_k^* = x_{n,k}(2p-1, 2q-1)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .*

*Demonstração.* É óbvio que, para o ponto mínimo, todos os  $x_k$  são distintos e diferentes de  $\pm 1$ . Isso segue do fato que  $E_T(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \infty$  quando algum  $x_k \rightarrow \pm 1$  ou  $x_k \rightarrow x_j$ . Logo, os pontos críticos de  $E$  se encontram no interior do simplex  $\Xi$ . Assim, o ponto crítico de  $E_T$  é obtido nos pontos em que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} E_T(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

e isso nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{1}{x_k - x_j} + \frac{p}{x_k - 1} + \frac{q}{x_k + 1} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.2)$$

Seja  $p_n(x)$  um polinômio mônico com zeros em  $x_k$ , isto é,

$$p_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Então,

$$p'_n(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j), \quad p''_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \prod_{l=1, l \neq i, l \neq j}^n (x - x_l).$$

Logo,

$$p'_n(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k - x_j), \quad p''_n(x_k) = 2 \sum_{i=1, i \neq k}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k - x_j).$$

Assim, (4.2) é equivalente a

$$\frac{1}{2} \frac{p''_n(x_k)}{p'_n(x_k)} + \frac{p}{x_k - 1} + \frac{q}{x_k + 1} = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Isso significa que o polinômio

$$(1 - x^2)p''_n(x) + 2[q - p - (p + q)x]p'_n(x)$$

se anula nos pontos  $x_k$ . Desde que esse polinômio é de grau  $n$ , pelo Teorema Fundamental da Álgebra, ele deve ser um múltiplo de  $p_n(x)$ , isto é,

$$(1 - x^2)p''_n(x) + 2[q - p - (p + q)x]p'_n(x) = \gamma_n p_n(x). \quad (4.3)$$

Para obter o fator  $\gamma_n$ , basta comparar o coeficiente de  $x^n$  de ambos os lados da última igualdade. Assim, segue que

$$(1 - x^2)p''_n(x) + 2[q - p - (p + q)x]p'_n(x) + n[n + 2(p + q) - 1]p_n(x) = 0.$$

Essa última equação é a equação diferencial para os polinômios de Jacobi  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)/c_n$  ( $\alpha = 2p-1$  e  $\beta = 2q-1$ ), com  $c_n$  sendo o coeficiente de  $x^n$  em  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$ . G. Szegő [57, Theorem 4.2.2] provou que a equação diferencial (4.3) possui solução polinomial para cada  $n \geq 0$  se, e somente se,  $\gamma_n = -n[n + 2(p + q) - 1]$ . Além disso, a solução é  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$  e não existe outra solução polinomial que seja linearmente independente de  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$ . Portanto, existe um único ponto  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  de  $\Xi$  no qual todas as derivadas de  $E_T(x_1, \dots, x_n)$  se anulam e as coordenadas desse ponto são os zeros de  $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$ .  $\square$

## Zeros dos polinômios de Laguerre e Hermite

T. J. Stieltjes considerou também modelos eletrostáticos similares para os polinômios de Laguerre e Hermite. A interpretação eletrostática para os zeros dos polinômios de Laguerre é a seguinte: suponha que exista uma carga fixa  $p > 0$  na origem e  $n$  cargas

unitárias distribuídas livremente nos pontos  $x_1, \dots, x_n$  em  $[0, \infty)$ . Então, a energia total desse campo é dada por

$$E_T(x_1, \dots, x_n) = E(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^n \phi(x_k),$$

com  $\phi(x) = p \ln 1/x$  representando a energia do “campo externo” criada pela carga fixa na origem. Logo,

$$E_T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln \frac{1}{|x_k - x_j|} + p \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{x_k}. \quad (4.4)$$

A fim de evitar que as cargas unitárias se movam para o infinito, impomos uma condição extra. A média aritmética das posições das  $n$  cargas unitárias deve ser limitada, isto é,

$$\sum_{k=1}^n x_k/n \leq K, \quad (4.5)$$

para alguma constante positiva  $K$ . Temos, então, o seguinte resultado:

**Teorema 4.2.** *A função  $E_T(x_1, \dots, x_n)$  definida por (4.4), com a condição (4.5), possui um único ponto de mínimo  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  quando  $x_1^*, \dots, x_n^*$  são os zeros do polinômio de Laguerre,  $L_n^{(2p-1)}(c_n x)$ , com  $c_n = (n + 2p - 1)/K$ .*

*Demonstração.* Para encontrar o mínimo de  $E_T$  usamos a teoria dos multiplicadores de Lagrange sobre a restrição (4.5). Observe que o mínimo é atingido quando  $\sum_{i=1}^n x_i = nK$ . Para resolver esse problema temos que minimizar a função

$$E_T(x_1, \dots, x_n) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i - nK \right).$$

Assim, o mínimo é atingido nos pontos  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  nos quais

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ E(x_1, \dots, x_n) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i - nK \right) \right] = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

e isso nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{1}{x_k - x_j} + \frac{p}{x_k} - \lambda = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.6)$$

Seja  $p_n(x)$  um polinômio mônico com zeros em  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , isto é,

$$p_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$



Então, (4.6) é equivalente a

$$\frac{1}{2} \frac{p_n''(x_k)}{p_n'(x_k)} + \frac{p}{x_k} - \lambda = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Isso significa que o polinômio

$$xp_n''(x) + 2(p - \lambda x)p_n'(x)$$

se anula nos pontos  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Como esse polinômio é de grau  $n$ , pelo Teorema Fundamental da Álgebra, ele deve ser um múltiplo de  $p_n(x)$ , isto é,

$$xp_n''(x) + 2(p - \lambda x)p_n'(x) = \gamma_n p_n(x). \quad (4.7)$$

Para se obter o fator  $\gamma_n$ , comparamos o coeficiente de  $x^n$  de ambos os lados da última igualdade. Assim, segue que

$$xp_n''(x) + 2(p - \lambda x)p_n'(x) + 2\lambda n p_n(x) = 0.$$

Essa última equação é a equação diferencial para os polinômios de Laguerre,  $L_n^{(2p-1)}(2\lambda x)$  ( $\alpha = 2p - 1$ ). Como no teorema anterior, G. Szegő [57] provou que a equação diferencial (4.7) possui solução polinomial para cada  $n \geq 0$  se, e somente se,  $\gamma_n = -2\lambda n$ , e a única solução polinomial é  $cL_n^{(2p-1)}(2\lambda x)$ , com  $c$  constante. Daí, temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2\lambda n} \sum_{k=1}^n x_{n,k}(\alpha), \quad \alpha = 2p - 1,$$

com  $x_{n,k}(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e  $\alpha = 2p - 1$ , sendo os zeros de  $L_n^{(2p-1)}(x)$ . De acordo com (2.23),

$$\sum_{k=1}^n x_{n,k}(\alpha) = n(n + 2p - 1),$$

e, então,  $2\lambda = (n + 2p - 1)/K$ . □

Por fim, apresentamos a interpretação eletrostática dos zeros dos polinômios de Hermite. Sejam  $n$  cargas unitárias distribuídas ao longo de fios infinitos que interceptam o eixo real nos pontos  $x_1, \dots, x_n$  que pertencem ao intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Nesse caso, a energia do campo é dada apenas por

$$E_T(x_1, \dots, x_n) = E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln \frac{1}{|x_k - x_j|}. \quad (4.8)$$

Necessitamos também impor uma condição a fim de evitar que as cargas se movam para  $\pm\infty$ . Uma vez que as posições podem percorrer todo o eixo real, impomos, então, que a média aritmética do quadrado dos pontos  $x_1, \dots, x_n$  seja limitada, ou seja,

$$\sum_{k=1}^n x_k^2/n \leq K, \quad (4.9)$$

para alguma constante positiva  $K$ .

**Teorema 4.3.** *A função  $E_T(x_1, \dots, x_n)$  definida por (4.8), com a condição (4.9), possui um único ponto de mínimo  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  quando  $x_1^*, \dots, x_n^*$  são os zeros do polinômio de Hermite,  $H_n(d_n x)$ , com  $d_n = \sqrt{(n-1)}/2K$ .*

*Demonstração.* De maneira similar ao caso anterior, para encontrar o mínimo de  $E_T$  usamos a teoria dos multiplicadores de Lagrange sobre a restrição (4.9). Observe que o mínimo é atingido quando  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = nK$ . Nesse caso, a função a ser minimizada é a seguinte:

$$E_T(x_1, \dots, x_n) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - nK \right).$$

O mínimo é atingido nos pontos  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  nos quais

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ E(x_1, \dots, x_n) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - nK \right) \right] = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

e isso nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{1}{x_k - x_j} - 2\lambda x_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.10)$$

Seja  $p_n(x)$  um polinômio mônico com zeros em  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , isto é,

$$p_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Então, (4.10) é equivalente a

$$\frac{1}{2} \frac{p_n''(x_k)}{p_n'(x_k)} - 2\lambda x_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Isso significa que o polinômio

$$p_n''(x) - 4\lambda x p_n'(x)$$

se anula nos pontos  $x_k$ . Desde que esse polinômio é de grau  $n$ , pelo teorema fundamental da álgebra, ele deve ser um múltiplo de  $p_n(x)$ , isto é,

$$p_n''(x) - 4\lambda x p_n'(x) = \gamma_n p_n(x). \quad (4.11)$$

Para se obter o fator  $\gamma_n$ , comparamos o coeficiente de  $x^n$  de ambos os lados da última igualdade. Assim, segue que

$$p_n''(x) - 4\lambda x p_n'(x) + 4\lambda n p_n(x) = 0.$$

Essa última equação é a equação diferencial para os polinômios de Hermite,  $H_n(\sqrt{2\lambda}x)$ . Por outro lado, a equação diferencial (4.11) possui única solução polinomial para cada  $n \geq 0$  se, e somente se,  $\gamma_n = -4\lambda n$ . Além disso, a única solução polinomial é  $cH_n(\sqrt{2\lambda}x)$ , com  $c$  constante. Esse fato, como nos casos anteriores, foi mostrado por G. Szegő [57]. Daí, temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{2\lambda n} \sum_{k=1}^n x_{n,k}^2,$$

com  $x_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sendo os zeros de  $H_n(x)$ . De acordo com (2.34)

$$\sum_{k=1}^n x_{n,k}^2 = n(n-1)/2.$$

Logo,  $\sqrt{2\lambda} = \sqrt{(n-1)/2K}$ . □

## 4.2 Monotonicidade

Como foi descrito na seção anterior, os zeros dos polinômios ortogonais clássicos são os pontos de equilíbrio de certos campos eletrostáticos na presença de um campo externo. Desde que o equilíbrio depende do campo externo, ou seja, dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  no caso dos polinômios de Jacobi,  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , e de  $\alpha$  no caso dos polinômios de Laguerre,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , a monotonicidade dos zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha)$  de  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha)}(x)$  com relação aos parâmetros fica intuitivamente clara, pois todas as cargas são positivas e se repelem. Apresentaremos, agora, uma demonstração formal de que os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $\beta$  e decrescentes de  $\alpha$  e, também, que os zeros  $x_{n,k}(\alpha)$  crescem com  $\alpha$ , resultados esses obtidos por A. Markov [46] ainda no final do século XIX.

Consideremos uma função peso  $\omega(x) = \omega(x; \tau)$  definida para todo  $x \in (a, b)$  e todo parâmetro  $\tau \in (c, d)$ . Portanto, para todo  $\tau$  fixo, existe uma sequência de polinômios ortogonais parametrizada  $\{P_n(x; \tau)\}_{n \geq 0}$  associadas à função peso  $\omega(x; \tau)$ , isto é,

$$\int_a^b x^k P_n(x; \tau) \omega(x; \tau) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definamos  $x_{n,k}(\tau)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , como sendo os zeros de  $P_n(x; \tau)$  arranjados em ordem decrescente, isto é,  $x_{n,1}(\tau) > \dots > x_{n,n}(\tau)$ . Em 1886, A. Markov [46] forneceu condições suficientes para que os zeros  $x_{n,k}(\tau)$  sejam funções crescentes ou decrescentes do parâmetro  $\tau$ .

**Teorema 4.4** (A. Markov, 1886). *Seja  $P_n(x; \tau)$  o  $n$ -ésimo polinômio ortogonal com relação à função peso  $\omega(x; \tau)$  que é positiva e tem a primeira derivada contínua com relação a  $\tau$  para  $a < x < b$  e  $c < \tau < d$ . Suponha que as integrais*

$$\int_a^b x^k \frac{\partial \omega(x; \tau)}{\partial \tau} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1, \quad (4.12)$$

*convergem uniformemente em todo subintervalo compacto de  $(c, d)$ . Se*

$$\frac{\partial \ln \omega(x; \tau)}{\partial \tau}$$

*é uma função crescente (decrescente) de  $x$  em  $(a, b)$ , então todo zero  $x_{n,k}(\tau)$  de  $P_n(x; \tau)$  é uma função crescente (decrescente) de  $\tau$ .*

*Demonstração.* Como  $P_n(x; \tau)$  é ortogonal em  $(a, b)$  com relação a  $\omega(x; \tau)$ , então, dada  $f(x)$  polinômio de grau  $2n-1$ , temos

$$\int_a^b f(x) \omega(x; \tau) dx = \sum_{k=1}^n A_k(\tau) f(x_{n,k}(\tau)), \quad (4.13)$$

com  $x_{n,k}(\tau)$  denotando os zeros de  $P_n(x; \tau)$  e com os pesos  $A_k(\tau)$  todos positivos. Daí, derivando (4.13) com relação ao parâmetro  $\tau$  e mudando a ordem entre diferenciação e integração (isso é possível devido à convergência uniforme da integral (4.12)), obtemos

$$\int_a^b f(x) \frac{\partial \omega(x; \tau)}{\partial \tau} dx = \sum_{i=1}^n \{A'_i(\tau) f(x_{n,i}(\tau)) + A_i(\tau) f'(x_{n,i}(\tau)) x'_{n,i}(\tau)\}. \quad (4.14)$$

Definamos o polinômio  $f(x)$  de grau  $2n - 1$  por

$$f(x) := \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)}.$$

Observe que

$$f(x_{n,i}(\tau)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.15)$$

Além disso, se  $i \neq k$ , então

$$f'(x_{n,i}(\tau)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n. \quad (4.16)$$

Seja  $w_k(x)$  um polinômio tal que  $w_k^2(x) = f(x)/(x - x_{n,k}(\tau))$ . Logo,  $f(x) = (x - x_{n,k}(\tau))w_k^2(x)$ . Derivando  $f(x)$  obtemos

$$f'(x) = w_k^2(x) + 2(x - x_{n,k}(\tau))w_k'(x)w_k(x).$$

Portanto,  $f'(x_{n,k}(\tau)) = w_k^2(x_{n,k}(\tau))$ . Por outro lado,

$$P_n(x; \tau) = (x - x_{n,k}(\tau))w_k(x).$$

Daí,

$$P_n'(x; \tau) = (x - x_{n,k}(\tau))w_k'(x) + w_k(x).$$

Logo,  $P_n'(x_{n,k}(\tau); \tau) = w_k(x_{n,k}(\tau))$  e, portanto,

$$f'(x_{n,k}(\tau)) = (P_n'(x_{n,k}(\tau); \tau))^2. \quad (4.17)$$

Por outro lado, (4.16) e (4.17) implicam que  $f'(x_{n,i}(\tau)) = (P_n'(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 \delta_{ik}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim, (4.14) se reduz a

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \frac{\partial \omega(x; \tau)}{\partial \tau} dx = A_k(\tau) (P_n'(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x_{n,k}'(\tau). \quad (4.18)$$

Seja  $g(x; \tau)$  uma função auxiliar definida por

$$g(x; \tau) := \frac{\partial \omega(x; \tau) / \partial \tau}{\omega(x; \tau)}.$$

Observe que

$$g(x_{n,k}(\tau); \tau) = \frac{\partial \omega(x_{n,k}(\tau); \tau) / \partial \tau}{\omega(x_{n,k}(\tau); \tau)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Daí, podemos reescrever (4.18) da seguinte forma:

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} g(x; \tau) \omega(x; \tau) dx = A_k(\tau) (P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x'_{n,k}(\tau). \quad (4.19)$$

Por outro lado, da ortogonalidade segue que

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \omega(x; \tau) dx = \int_a^b \frac{P_n(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} P_n(x; \tau) \omega(x; \tau) dx = 0. \quad (4.20)$$

Agora, multiplicando (4.20) pela constante  $g(x_{n,k}(\tau); \tau)$  obtemos

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{(x - x_{n,k}(\tau))} g(x_{n,k}(\tau); \tau) \omega(x; \tau) dx = 0.$$

Subtraindo, então, da igualdade (4.19), temos

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} (g(x; \tau) - g(x_{n,k}(\tau); \tau)) dx = A_k(\tau) (P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x'_{n,k}(\tau), \quad (4.21)$$

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b P_n^2(x; \tau) \frac{g(x; \tau) - g(x_{n,k}(\tau); \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} dx = A_k(\tau) (P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x'_{n,k}(\tau). \quad (4.22)$$

Uma vez que  $g(x; \tau)$  tem derivada contínua com relação a  $x$ , pelo teorema do valor médio,

$$g'(\xi; \tau) = \frac{g(x; \tau) - g(x_{n,k}(\tau); \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)},$$

para algum ponto  $\xi$  entre  $x$  e  $x_{n,k}(\tau)$ . Assim, se  $g'(\xi; \tau) > 0$  para todo  $\xi$  em  $(a, b)$ , a função integrante em (4.22) é não negativa e, daí,  $x'_{n,k}(\tau) > 0$ . Analogamente, se  $g'(\xi; \tau) < 0$  para todo  $\xi$  pertencente ao intervalo  $(a, b)$ , então  $x'_{n,k}(\tau) < 0$ .  $\square$

**Corolário 4.1.** *Sejam  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  os zeros do  $n$ -ésimo polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Então*

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0 \quad e \quad \frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

*Demonstração.* Os polinômios de Jacobi são ortogonais em  $[-1, 1]$  com relação à função peso  $\omega(\alpha, \beta; x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ . Agora, fixamos  $\beta$  e consideremos  $\omega(\alpha, \beta; x)$  uma função de  $\alpha$ . Como

$$\ln \omega(\alpha, \beta; x) = \ln((1-x)^\alpha (1+x)^\beta) = \alpha \ln(1-x) + \beta \ln(1+x), \quad (4.23)$$

temos

$$\frac{\partial \ln \omega(\alpha, \beta; x)}{\partial \alpha} = \ln(1 - x).$$

Essa é uma função decrescente em  $-\infty < x < 1$ , pois

$$\frac{d}{dx} \ln(1 - x) = -\frac{1}{1 - x} < 0.$$

Daí, pelo teorema anterior,

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

De forma análoga, obtemos que

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

□

É interessante observar o que acontece com os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  quando os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  assumem o mesmo valor. Consideremos então  $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ . Neste caso os polinômios de Jacobi se reduzem aos polinômios de Gegenbauer,  $C_n^\lambda(x)$ . Fica claro que os zeros positivos de  $C_n^\lambda(x)$  são funções decrescentes de  $\lambda$  e os zeros negativos funções crescentes de  $\lambda$ . Não forneceremos nenhuma demonstração desse fato, pois ela se faz de forma análoga à dos zeros dos polinômios de Jacobi.

**Corolário 4.2.** *Sejam  $x_{n,k}(\alpha)$  os zeros do  $n$ -ésimo polinômio de Laguerre,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ . Então,*

$$\frac{dx_{n,k}(\alpha)}{d\alpha} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

*Demonstração.* Os polinômios de Laguerre são ortogonais em  $[0, \infty)$  com relação à função peso  $\omega(x; \alpha) = x^\alpha e^{-x}$ . Assim,

$$\ln \omega(x; \alpha) = \ln(x^\alpha e^{-x}) = \alpha \ln(x) - x. \quad (4.24)$$

Derivando (4.24) com relação a  $\alpha$ , obtemos

$$\frac{\partial \ln \omega(x; \alpha)}{\partial \alpha} = \ln(x)$$

que é uma função crescente em  $0 < x < \infty$ . Daí, pelo Teorema 4.4, temos que

$$\frac{dx_{n,k}(\alpha)}{d\alpha} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

□

## 4.3 Velocidade de crescimento

Vimos, nas duas seções anteriores, que os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ ,  $x_{n,k}(\lambda)$  e  $x_{n,k}(\alpha)$  dos polinômios de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre, respectivamente, são funções monótonas com relação aos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$ , fato esse demonstrado ainda no final do século XIX. Todavia, a velocidade de crescimento ou decrescimento desses zeros com relação aos parâmetros permaneceu até a pouco tempo em aberto. Esse problema despertou a curiosidade de vários matemáticos. Lembremos as contribuições de A. Laforgia, S. Ahmed, M. E. Muldoon, R. Spigler, A. Elbert, P. D. Siafarikas, E. K. Ifantis, J. Letessier, D. K. Dimitrov e M. E. H. Ismail, descritas na introdução da atual tese. Formulamos, então, os seguintes problemas:

**Problema 4.1.** *Com que velocidade os zeros  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, \dots, [n/2]$ , do  $n$ -ésimo polinômio de Gegenbauer decrescem com  $\lambda$ ?*

**Problema 4.2.** *Com que velocidade os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , do  $n$ -ésimo polinômio de Jacobi crescem com  $\beta$  e decrescem com  $\alpha$ ?*

**Problema 4.3.** *Com que velocidade os zeros  $x_{n,k}(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , do  $n$ -ésimo polinômio de Laguerre crescem com  $\alpha$ ?*

Observe que, para responder a essas questões, é necessário calcular as derivadas

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta}, \quad \frac{dx_{n,k}(\lambda)}{d\lambda} \quad \text{e} \quad \frac{dx_{n,k}(\alpha)}{d\alpha},$$

e isso implica em calcular, explicitamente, os zeros de todos os polinômios de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre de todos os graus, o que é impossível. Para contornar esse fato, uma outra forma de abordar o problema da velocidade de crescimento ou decrescimento dos zeros foi proposta. Foram considerados os seguintes problemas:

**Problema 4.1\*** *Qual é a função “extrema”  $f_n(\lambda)$ , positiva e suave, que força os produtos  $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, \dots, [n/2]$ , a crescerem com  $\lambda$ ?*

**Problema 4.2\*** [Possível Formulação] *Qual é a função “extrema”  $f_n(\alpha, \beta)$ , positiva*



e suave, que força os produtos  $f_n(\alpha, \beta)x_{n,k}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , a decrescerem com  $\beta$  e a crescerem com  $\alpha$ ?

**Problema 4.3\*** [Possível Formulação] Qual é a função “extrema”  $f_n(\alpha)$ , positiva e suave, que força os produtos  $f_n(\alpha)x_{n,k}(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , a decrescerem com  $\alpha$ ?

Em cada um dos problemas acima buscamos determinar uma função  $f$  tal que, quando multiplicamos os zeros por  $f$ , a monotonicidade se inverte. Além disso, desejamos que esta função seja, de um certo modo, “extrema”. Mas, qual é o significado dessa expressão? Para a exata compreensão desse termo, precisamos recorrer ao trabalho de D. K. Dimitrov [13], de 1996, onde, pela primeira vez, foi feita uma análise do significado “extrema” da função multiplicadora do Problema 4.1\*.

### 4.3.1 Zeros dos polinômios de Gegenbauer

Consideremos o Problema 4.1\* de uma forma geral, ou seja, determinar funções  $f_{n,k}(\lambda)$  tais que os produtos

$$Z_{n,k}(\lambda) := f_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda) \quad (4.25)$$

sejam funções crescentes de  $\lambda > -1/2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq [n/2]$ . Naturalmente,  $f_{n,k}(\lambda)$  deve ser positiva e diferenciável. Como  $x_{n,k}(\lambda)$  são funções positivas e decrescentes, isto é,  $x_{n,k}(\lambda) > 0$  e  $x'_{n,k}(\lambda) < 0$  e, além disso,  $f_{n,k}(\lambda) > 0$ , então as desigualdades

$$0 \leq Z'_{n,k}(\lambda) = f'_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda) + f_{n,k}(\lambda)x'_{n,k}(\lambda),$$

obtidas de (4.25), implicam em

$$\frac{f'_{n,k}(\lambda)}{f_{n,k}(\lambda)} \geq -\frac{x'_{n,k}(\lambda)}{x_{n,k}(\lambda)}, \text{ para } \lambda > -1/2. \quad (4.26)$$

Assim, uma vez que os zeros positivos de  $C_n^\lambda(x)$  são funções decrescentes de  $\lambda$ , podemos enunciar o seguinte problema:

**P1.** Para todo  $n$  fixo e  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , determinar as funções  $f_{n,k}(\lambda)$ , positivas e suaves para  $\lambda > -1/2$ , tais que os produtos  $Z_{n,k}(\lambda) = f_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$  sejam funções crescentes de  $\lambda$  e  $f'_{n,k}(\lambda)/f_{n,k}(\lambda)$  sejam mínimas.

Decorre imediatamente de (4.26) que **P1** é equivalente ao problema de encontrar  $x'_{n,k}(\lambda)/x_{n,k}(\lambda)$ . Se, ao invés disso, desejamos procurar funções  $f_n(\lambda)$  que dependam somente de  $n$ , mas não de  $k$ , então **P1** pode ser reformulado como:

**P2.** Para todo inteiro  $n \geq 2$  fixo, determinar a função  $f_n(\lambda)$ , positiva e suave para  $\lambda > -1/2$ , tal que, para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq [n/2]$ , os produtos  $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$  sejam funções crescentes de  $\lambda$  e  $f'_n(\lambda)/f_n(\lambda)$  seja mínima.

Além disso, seria interessante encontrar uma função universal. Então, o problema pode ser reescrito da seguinte forma:

**P3.** Determinar a função  $f(\lambda)$ , positiva e suave para  $\lambda > -1/2$ , tal que, para  $n \geq 2$  fixo e todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq [n/2]$ , os produtos  $f(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$  sejam funções crescentes de  $\lambda$  e  $f'(\lambda)/f(\lambda)$  seja mínima.

A noção “extrema” para os problemas enunciados é equivalente à minimização dos quocientes  $f'_{n,k}(\lambda)/f_{n,k}(\lambda)$ ,  $f'_n(\lambda)/f_n(\lambda)$  e  $f'(\lambda)/f(\lambda)$ , respectivamente. Obviamente essas exigências determinam uma função conhecida a menos de um fator constante.

Se a solução geral  $f_{n,k}(\lambda)$  de **P1** é encontrada, o que é a mais difícil, então as soluções  $f_n(\lambda)$  de **P2** e  $f(\lambda)$  de **P3** podem ser, conseqüentemente, obtidas, para qualquer  $\lambda > -1/2$  fixo, através das fórmulas

$$\frac{f'_n(\lambda)}{f_n(\lambda)} = \max_{1 \leq k \leq [n/2]} \frac{f'_{n,k}(\lambda)}{f_{n,k}(\lambda)} \quad \text{e} \quad \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \sup_{n \geq 2} \frac{f'_n(\lambda)}{f_n(\lambda)}.$$

Portanto, para resolver esses problemas, necessitamos de limitantes para a derivada logarítmica  $d \ln x_{n,k}(\lambda)/d\lambda = x'_{n,k}(\lambda)/x_{n,k}(\lambda)$ .

Para os Problemas 4.2\* e 4.3\*, o significado de função “extrema” é análogo, considerando as particularidades de cada caso. Analisaremos cada um deles posteriormente.

Historicamente, a solução do Problema 4.1\* sobre os zeros dos polinômios de Gegenbauer veio depois de uma série de artigos, publicados ao longo de 25 anos, durante os quais várias conjecturas e contribuições foram feitas. Na verdade, toda essa discussão teve início em 1981 com a pioneira contribuição de A. Laforgia [40], que provou o seguinte resultado:

**Teorema 4.5** (A. Laforgia, 1981). *Sejam  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , os zeros de  $C_n^\lambda(x)$*

arranjados em ordem decrescente. Então,  $\lambda x_{n,k}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$  para  $0 < \lambda < 1$ .

Em [41] ele conjecturou que esse resultado seria válido para todo  $\lambda > 0$ , isto é:

**Conjectura 4.1** (A. Laforgia, 1985). *Sejam  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , os zeros de  $C_n^\lambda(x)$  arranjados em ordem decrescente. Então,  $\lambda x_{n,k}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$  para  $\lambda > 0$ .*

S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler [1], em 1986, refinaram um resultado de Spigler [53] de 1984 demonstrando o seguinte teorema.

**Teorema 4.6** (S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler, 1986). *Sejam  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , os zeros de  $C_n^\lambda(x)$  arranjados em ordem decrescente. Então,*

$$\left( \lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \right)^{1/2} x_{n,k}(\lambda)$$

*são funções crescentes de  $\lambda$  para  $-1/2 < \lambda \leq 3/2$ .*

Em 1988, M. E. H. Ismail e J. Letessier [34] reescreveram a **Conjectura 4.1** da seguinte forma:

**Conjectura 4.2** (M. E. H. Ismail e J. Letessier, 1988). *Sejam  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , os zeros de  $C_n^\lambda(x)$  arranjados em ordem decrescente. Então,  $\sqrt{\lambda} x_{n,k}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$  para  $\lambda > 0$ .*

Finalmente, R. A. Askey sugeriu que a função “extrema” e universal, isto é, aquela não dependente de  $n$ , seria  $f(\lambda) = \sqrt{\lambda + 1}$ . A sugestão de R. A. Askey foi reformulada como conjectura por M. E. H. Ismail [33], em 1989. Nesta Tese, denominamos essa conjectura por LILAC em homenagem a A. Laforgia, M. E. H. Ismail, J. Letessier e R. A. Askey.

**Conjectura 4.3** (LILAC, 1989). *Se  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , são os zeros de  $C_n^\lambda(x)$  arranjados em ordem decrescente, então  $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}(\lambda)$  crescem para todo  $\lambda > -1/2$ .*

Naquele mesmo ano, 1989, E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas [31] provaram a conjectura para o maior zero positivo  $x_{n,1}(\lambda)$ , usando uma técnica de função analítica. O resultado demonstrado por eles é o seguinte:

**Teorema 4.7** (E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas, 1989). *Seja  $x_{n,1}(\lambda)$  o maior zero de  $C_n^\lambda(x)$ . Então,  $\sqrt{\lambda+1}x_{n,1}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$  para todo  $\lambda > -1/2$ .*

Em 1996, D. K. Dimitrov [13] provou LILAC para  $n$  suficientemente grande. Além disso, ele provou essa conjectura para o maior zero  $x_{n,1}(\lambda)$  como E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas em [31], mas usando um método diferente.

**Teorema 4.8** (D. K. Dimitrov, 1996). *Seja  $\nu$  um inteiro não-negativo. Então, para todo  $n > 1 + (\nu^2 + 3\nu + 3/2)^{1/2}$  e  $k$ ,  $1 \leq k \leq [n/2]$ , os produtos  $\sqrt{\lambda+1}x_{n,k}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$  para  $-1/2 < \lambda \leq 3/2 + \nu$ .*

**Corolário 4.3** (D. K. Dimitrov, 1996). *Se  $n > 2$  e  $1 \leq k \leq [n/2]$ , então  $\sqrt{\lambda+1}x_{n,k}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$  para  $-1/2 < \lambda \leq 9/2$ .*

**Teorema 4.9** (D. K. Dimitrov, 1996). *Seja  $\lambda > -1/2$ . Então,*

(i) *para todo  $n$  par,  $\sqrt{\lambda+1}x_{n,1}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$ ;*

(ii) *para todo  $n \geq 3$  ímpar,  $\sqrt{\lambda+2}x_{n,1}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$ .*

Em 1999, A. Elbert e P. D. Siafarikas [24] estenderam o resultado de S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler [1] de 1986, provando, assim, a conjectura de A. Laforgia, M. E. H. Ismail, J. Letessier e R. A. Askey (LILAC).

**Teorema 4.10** (A. Elbert e P. D. Siafarikas, 1999). *Sejam  $x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , os zeros de  $C_n^\lambda(x)$  arranjados em ordem decrescente. Então,*

$$\left( \lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \right)^{1/2} x_{n,k}(\lambda) \quad (4.27)$$

*crescem para todo  $\lambda > -1/2$ .*

Finalmente, em 2002, D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues [19] provaram que a função

$$f_n(\lambda) = \left( \lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2) \right)^{1/2}$$

é de fato assintoticamente extrema.

**Teorema 4.11** (D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues, 2002). *Seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $h_n(\lambda)$  é positiva e  $h_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , são funções crescentes de  $\lambda$  para  $\lambda > -1/2$ , então*

$$\frac{h'_{2n}(\lambda)}{h_{2n}(\lambda)} > \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad (4.28)$$

e

$$\frac{h'_{2n+1}(\lambda)}{h_{2n+1}(\lambda)} > \frac{1}{2(n+\lambda+1)}. \quad (4.29)$$

Além disso, se  $h_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + c_n}$ , então

$$c_{2n} < \frac{4n^2 + n + 1}{4n + 2} \quad (4.30)$$

e

$$c_{2n+1} < \frac{4n^2 + 7n + 9}{4n + 6}. \quad (4.31)$$

Observe que as desigualdades (4.28) e (4.29) fornecem limites superiores para a derivada logarítmica da função extrema para o problema em discussão. Obviamente, as desigualdades (4.30) e (4.31) são equivalentes a

$$c_{2n} < n - \frac{1}{4} + \frac{3}{2(4n+2)}$$

e

$$c_{2n+1} < n + \frac{1}{4} + \frac{15}{4(2n+3)}.$$

Pelo resultado de A. Elbert e P. D. Siafarikas [24], os produtos  $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ ,  $k = 1, \dots, [n/2]$  crescem com  $\lambda$  se

$$f_n(\lambda) = \left( \lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

que pode ser reescrito como

$$f_{2n}^2(\lambda) = \lambda + n - \frac{1}{4} + \frac{3}{4(4n+1)}$$

e

$$f_{2n+1}^2(\lambda) = \lambda + n + \frac{1}{4} + \frac{3}{4(4n+3)}.$$

Por outro lado, as desigualdades (4.30) e (4.31) mostram que as funções  $f_n^2(\lambda)$  são limitadas superiormente por

$$f_{2n}^2(\lambda) < h_{2n}^2(\lambda) = \lambda + n - \frac{1}{4} + \frac{3}{2(4n+2)}$$

e

$$f_{2n+1}^2(\lambda) < h_{2n+1}^2(\lambda) = \lambda + n + \frac{1}{4} + \frac{15}{4(2n+3)}$$

e, além disso, as diferenças  $f_{2n}^2(\lambda) - h_{2n}^2(\lambda)$  e  $f_{2n+1}^2(\lambda) - h_{2n+1}^2(\lambda)$ , para todo  $\lambda$  fixo, se comportam como  $\mathcal{O}(1/n)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o multiplicador (4.32) é assintoticamente preciso, isto é, não pode ser melhorado. Logo, esse resultado finaliza a discussão de determinar a função “extrema” do Problema 4.1\*.

Todas essas contribuições foram muito importantes para se conhecer o comportamento dos zeros dos polinômios de Gegenbauer mais profundamente.

Só para exemplificar o fato da função  $f_n(\lambda)$  ser assintoticamente “extrema”, consideremos a Figura 4.1 dos zeros positivos do polinômio de Gegenbauer de grau 4.

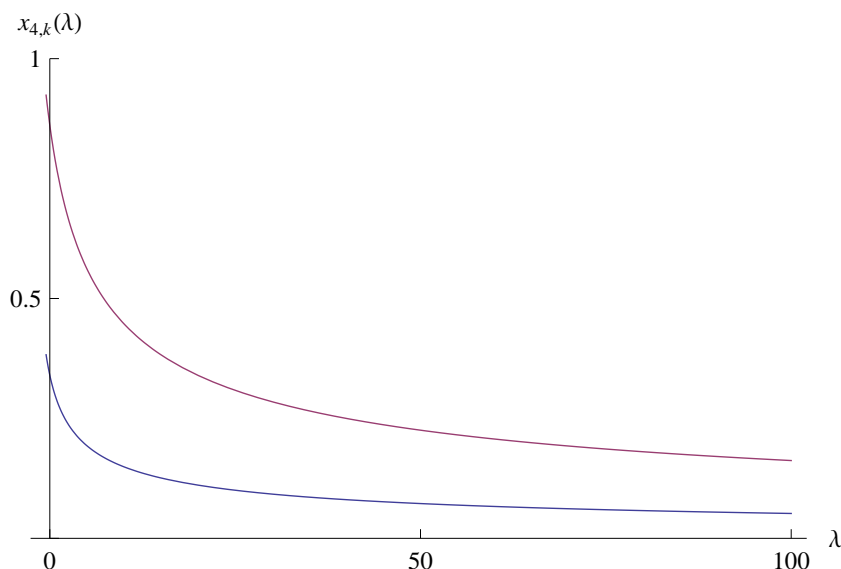


Figura 4.1: Gráfico dos zeros positivos de  $C_4^\lambda(x)$ .

Como vemos, eles são funções decrescentes do parâmetro  $\lambda$ . Agora observe o que acontece quando multiplicamos esses zeros pela função  $f_4(\lambda)$ . Como mostra a Figura 4.2, todos os produtos  $f_4(\lambda)x_{4,1}(\lambda)$  e  $f_4(\lambda)x_{4,2}(\lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$ .

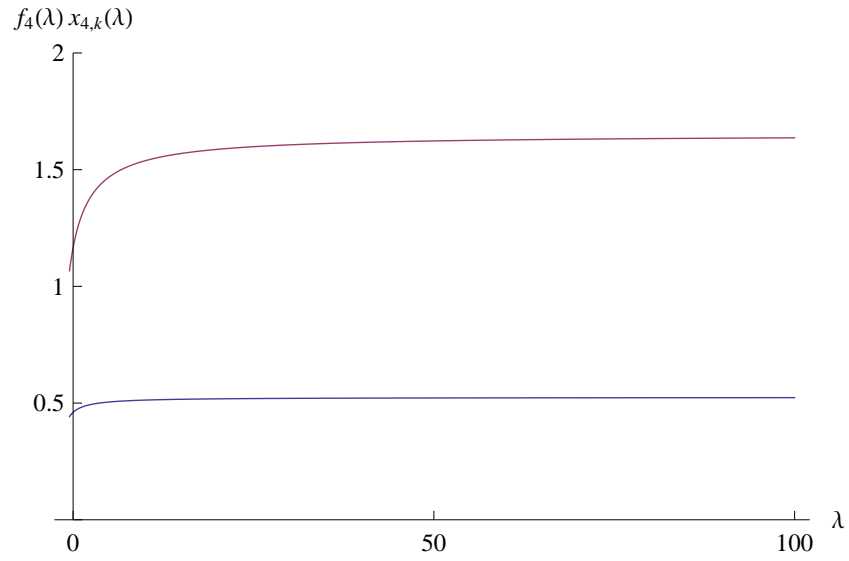


Figura 4.2: Gráfico dos produtos  $f_4(\lambda)x_{4,1}(\lambda)$  e  $f_4(\lambda)x_{4,2}(\lambda)$ .

Se aumentamos um pouco valor de  $f_4(\lambda)$ , os produtos já deixam de ser funções crescentes. Veja a Figura 4.3.

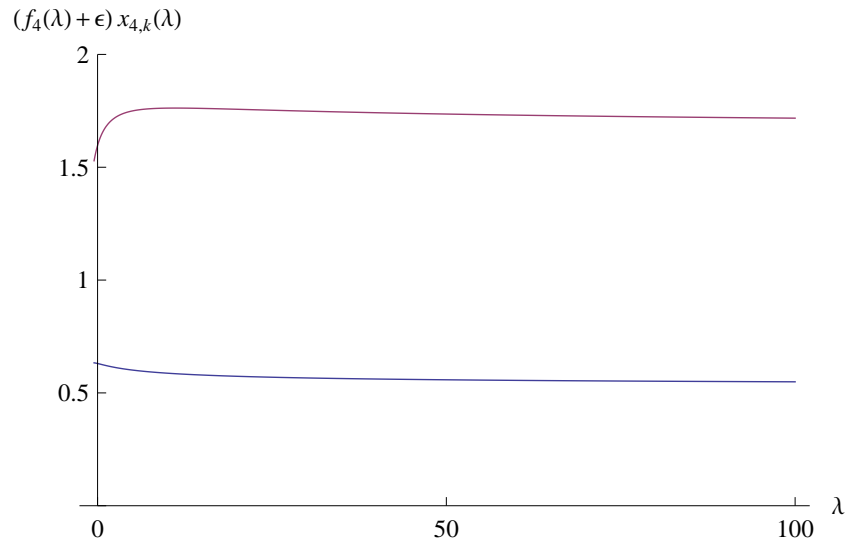


Figura 4.3: Gráfico de  $(f_4(\lambda) + \epsilon)x_{4,1}(\lambda)$  e  $(f_4(\lambda) + \epsilon)x_{4,2}(\lambda)$  para um  $\epsilon$  pequeno.

### 4.3.2 Zeros dos polinômios de Jacobi

Passamos, agora, para o Problema 4.2\* sobre os zeros dos polinômios de Jacobi. É interessante observar que, ao longo dos últimos anos, desde a pioneira contribuição de A. Laforgia, em 1981, sobre os zeros dos polinômios de Gegenbauer, até o resultado de D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues de 2002, nenhum resultado equivalente sobre os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  dos polinômios de Jacobi havia sido encontrado, apesar do interesse dos especialistas em Funções Especiais. Uma cuidadosa inspeção na evolução das conjecturas e resultados com relação aos zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer, descritos na subseção anterior, levaram às seguintes conclusões (razões) para a falta de resultados nessa direção:

1. Os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  mudam de sinal. Isso indica que, ao invés de considerarmos os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ , é mais razoável investigar as quantidades  $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$  ou  $1 + x_{n,k}(\alpha, \beta)$ , pois elas já não mudam de sinal;
2. Outro motivo é que quantidades que obedecem comportamentos assintóticos devem ser consideradas para que os resultados obtidos sejam precisos pelo menos para grandes valores do parâmetro. Uma fórmula assintótica desse tipo para os zeros de Gegenbauer é  $\sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) \rightarrow h_{n,k}$ . Para os zeros do polinômio de Jacobi, vale o seguinte limite:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) = 2x_{n,n-k+1}(\alpha), \quad (4.33)$$

com  $x_{n,j}(\alpha)$  denotando os zeros do  $n$ -ésimo polinômio de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  arranjados em ordem decrescente.

Depois dessas observações e junto com o fato de que as quantidades  $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , são funções decrescentes de  $\beta$  e crescentes de  $\alpha$ , obtivemos a **correta formulação** para o Problema 4.2\*:

**Problema 4.2\*\* [Formulado por D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2007].** *Determine a função “extrema”  $f_n(\alpha, \beta)$ , positiva e suave, que força os produtos*

$$f_n(\alpha, \beta) (1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)), \quad k = 1, \dots, n,$$



a crescerem como funções de  $\beta$ ,  $-1 < \beta < \infty$ , e a decrescerem como funções de  $\alpha$ ,  $-1 < \alpha < \infty$ .

Antes de apresentarmos a solução para esse problema, descreveremos o exato significado de função “extrema” para esse caso, equivalente àquela feita por D. K. Dimitrov para os zeros dos polinômios de Gegenbauer. Desde que as quantidades  $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$  decrescem como funções de  $\beta$ , isso sugere que procuremos por uma função  $f_n(\alpha, \beta)$  que force os produtos  $f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))$  a crescerem. É natural exigir que, para todo  $\alpha$  fixo,  $\alpha \in (-1, \infty)$ ,  $f_n$  seja uma função positiva e suave de  $\beta$ , para  $\beta \in (-1, \infty)$ .

Consideremos, então, as quantidades

$$Z_{n,k}(\alpha, \beta) = f_{n,k}(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))$$

como funções de  $\beta$ , com  $f_{n,k}(\alpha, \beta)$  sendo uma função positiva e diferenciável com relação a  $\beta$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k = 1, \dots, n$  e  $\alpha \in (-1, \infty)$ . Que condições devemos impor a  $f_{n,k}(\alpha, \beta)$  para que as desigualdades  $\partial Z_{n,k}(\alpha, \beta)/\partial \beta \geq 0$  sejam satisfeitas? Como

$$0 \leq \frac{\partial Z_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial f_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta}(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) - f_{n,k}(\alpha, \beta) \frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta},$$

com  $f_{n,k}(\alpha, \beta) > 0$ ,  $(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) > 0$  e  $\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)/\partial \beta > 0$ , então devemos ter

$$\frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > -\frac{\partial \ln(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))}{\partial \beta}. \quad (4.34)$$

Portanto, dentre todas as funções  $f_{n,k}(\alpha, \beta)$ ,  $n \geq 1$ ,  $k = 1, \dots, n$ , suaves com relação a  $\beta$  e que forçam os correspondentes produtos  $Z_{n,k}(\alpha, \beta)$  a crescerem com  $\beta$ , a melhor possível é aquela que satisfaz (4.34).

Assim, uma vez que as quantidades  $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$  são funções decrescentes de  $\beta$ , o seguinte problema envolvendo os zeros dos polinômios de Jacobi pode ser enunciado:

**P1’.** Para todo número natural  $n$  e  $\alpha > -1$  fixos e  $k = 1, \dots, n$ , determinar a função  $f_{n,k}(\alpha, \beta)$ , positiva e suave para  $\beta > -1$ , tal que os produtos

$$Z_{n,k}(\alpha, \beta) = f_{n,k}(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))$$

sejam funções crescentes de  $\beta$  e

$$\frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial f_{n,k}(\alpha, \beta)/\partial \beta}{f_{n,k}(\alpha, \beta)}$$

sejam mínimas.

Decorre imediatamente de (4.34) que o problema é equivalente a determinar explicitamente todas as derivadas logarítmicas de todas as quantidades  $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$ , isto é, determinar  $\partial \ln(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))/\partial \beta$ . Podemos reduzir o problema a determinar funções  $f_n(\alpha, \beta)$  que dependam somente de  $n$ , mas não de  $k$ . Sendo assim,  $P1'$  é reformulado como:

**P2'.** Para todo inteiro  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1$  fixos, determinar a função  $f_n(\alpha, \beta)$  positiva e suave para  $\beta > -1$ , tal que, para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , os produtos

$$t_{n,k}(\alpha, \beta) = f_n(\alpha, \beta)x_{n,k}(\alpha, \beta)$$

sejam funções crescentes de  $\beta$  e

$$\frac{\partial \ln f_n(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial f_n(\alpha, \beta)/\partial \beta}{f_n(\alpha, \beta)}$$

seja mínima.

É possível, ainda, determinar uma função universal.

**P3'.** Para todo  $\alpha > -1$  fixo, qual é a função  $f(\alpha, \beta)$ , positiva e suave para  $\alpha, \beta > -1$ , tal que, para todo  $n \geq 2$  fixo e  $1 \leq k \leq n$ , os produtos  $f(\alpha, \beta)x_{n,k}(\alpha, \beta)$  sejam funções crescentes de  $\beta$  e

$$\frac{\partial \ln f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial f(\alpha, \beta)/\partial \beta}{f(\alpha, \beta)}$$

seja mínima.

O significado de função “extrema” para os problemas enunciados acima é equivalente à minimização das derivadas logarítmicas

$$\frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta}, \frac{\partial \ln f_n(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \text{ e } \frac{\partial \ln f(\alpha, \beta)}{\partial \beta},$$

respectivamente. Obviamente, essas exigências determinam uma função conhecida a menos de um fator constante.

Se a solução geral  $f_{n,k}(\alpha, \beta)$  de **P1'** é encontrada, que é a mais difícil, então as soluções  $f_n(\alpha, \beta)$  de **P2'** e  $f(\alpha, \beta)$  de **P3'** são, conseqüentemente, obtidas através das fórmulas

$$\frac{\partial \ln f_n(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$$

e

$$\frac{\partial \ln f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sup_{n \geq 2} \frac{\partial \ln f_n(\alpha, \beta)}{\partial \beta},$$

para quaisquer  $\alpha, \beta > -1$ . Logo, para resolver esses problemas, necessitamos de limites superiores para as derivadas logarítmicas  $\partial \ln(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))/\partial \beta$ .

Nesta tese, reduzimos o problema a determinar uma função  $f_n(\alpha, \beta)$ , positiva e suave, que força os produtos  $t_{n,k}(\alpha, \beta) = f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))$ ,  $k = 1, \dots, n$ , a crescerem com  $\beta$ ,  $-1 < \beta < \infty$ . Assim, uma vez que é exigido que  $f_n(\alpha, \beta)$  seja uma função suave com a propriedade de que  $t_{n,k}(\alpha, \beta)$  cresça com  $\beta$ , então a melhor escolha para  $f_n$  é aquela para a qual sua derivada logarítmica com relação a  $\beta$  seja a menor possível.

Uma de nossas contribuições é o seguinte resultado (ver [17]):

**Teorema 4.12** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2007). *Para cada  $n$  natural e  $k = 1, \dots, n$ , os produtos*

$$f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)),$$

*com*

$$f_n(\alpha, \beta) = 2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1),$$

*são funções crescentes de  $\beta$  para  $\beta \in (-1, \infty)$ .*

Por um simples argumento de simetria, ver (2.15), segue que:

**Corolário 4.4** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2007). *Para cada  $n$  natural e  $k = 1, \dots, n$ , os produtos*

$$f_n(\alpha, \beta)(1 + x_{n,k}(\alpha, \beta)),$$

*são funções crescentes de  $\alpha$  para  $\alpha \in (-1, \infty)$ .*

Para justificar a condição extrema de  $f_n$  no Teorema 4.12, reformulamo-lo da forma a seguir.

**Teorema 4.13** (Formulação Equivalente). *Para cada  $n$  natural e  $k = 1, \dots, n$ , os produtos*

$$g_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)), \tag{4.35}$$

com

$$g_n(\alpha, \beta) = \beta + n + \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{1 - \alpha^2}{2(2n + \alpha + 1)}, \quad (4.36)$$

são funções crescentes de  $\beta$  em  $(-1, \infty)$ .

Temos, também, a seguinte reformulação:

**Corolário 4.5** (Formulação Equivalente). *Para cada  $n$  natural e  $k = 1, \dots, n$ , os produtos*

$$g_n(\beta, \alpha) (1 + x_{n,k}(\alpha, \beta))$$

são funções crescentes de  $\alpha$  em  $(-1, \infty)$ .

Empregando o método desenvolvido em [19], que é baseado no critério de estabilidade clássico de Routh-Hurwitz, provamos que a função  $g_n(\alpha, \beta)$  é assintoticamente “extrema” com relação a  $n$ .

**Teorema 4.14** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2007). *Sejam  $n$  natural,  $\alpha > -1$  e  $h_n(\alpha, \beta)$  considerada como função de  $\beta$ , positiva e continuamente diferenciável para  $\beta \in (-1, \infty)$ . Se os produtos*

$$h_n(\alpha, \beta)(1 - x_{nk}(\alpha, \beta)), \quad k = 1, \dots, n,$$

são funções crescentes de  $\beta$  em  $(-1, \infty)$ , então

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln h_n(\alpha, \beta) > \frac{1}{(n + \alpha + \beta + 1)}. \quad (4.37)$$

Além disso, se  $h_n(\alpha, \beta) = \beta + n + (\alpha + 1)/2 + d_n(\alpha)$ , então

$$d_n(\alpha) < \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2(n + \alpha + 1)}. \quad (4.38)$$

Como a função “extrema”, com a propriedade desejada, deve possuir a menor derivada logarítmica possível, da desigualdade (4.37) temos que  $h_n$  deve ser uma função linear de  $\beta$ . Isso justifica a escolha de  $h_n(\alpha, \beta)$ , conforme indicado na segunda parte do Teorema 4.14. Comparando a forma explícita da função  $g_n(\alpha, \beta)$ , dada em (4.36), com a função  $h_n(\alpha, \beta)$  dada no Teorema 4.14, temos que  $g_n(\alpha, \beta) - h_n(\alpha, \beta) < 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha, \beta > -1$ , e essa diferença, para todo  $\beta$  fixo, se comporta como  $\mathcal{O}(1/n)$

quando  $n$  tende ao infinito. Portanto, a função  $g_n(\alpha, \beta)$  é assintoticamente precisa, isto é, não pode ser melhorada, finalizando assim, a discussão de determinar a função “extrema” do Problema 4.2\*.

Todos esses resultados nos ajudaram a conhecer, mais profundamente, o comportamento dos zeros dos polinômios de Jacobi.

Como exemplo, consideremos os zeros  $x_{4,k}(\alpha, \beta)$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , do polinômio de Jacobi  $P_4^{(\alpha, \beta)}(x)$ , com  $\alpha = 1$ . A Figura 4.4 mostra que as quantidades  $1 - x_{4,k}(\alpha, \beta)$  são todas funções decrescentes do parâmetro  $\beta$ .

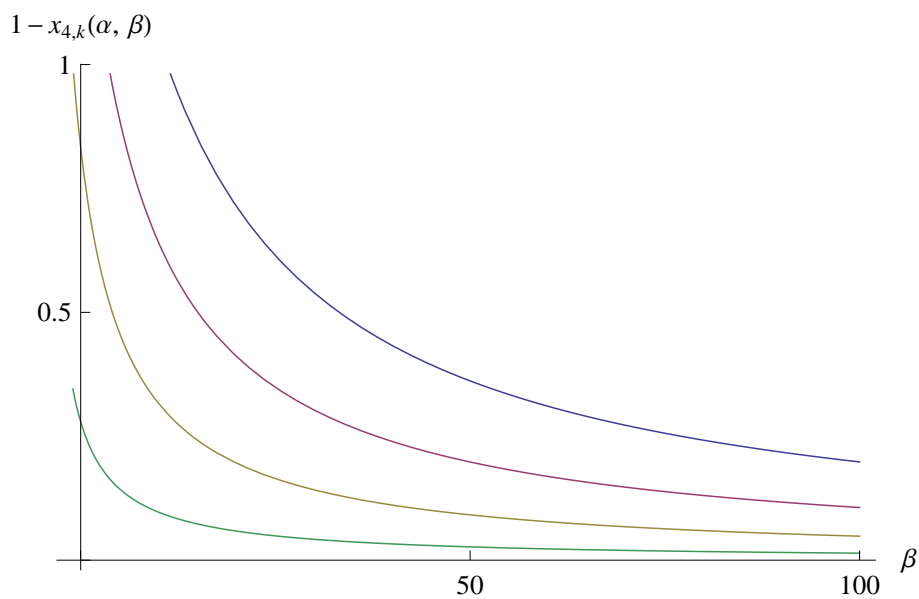
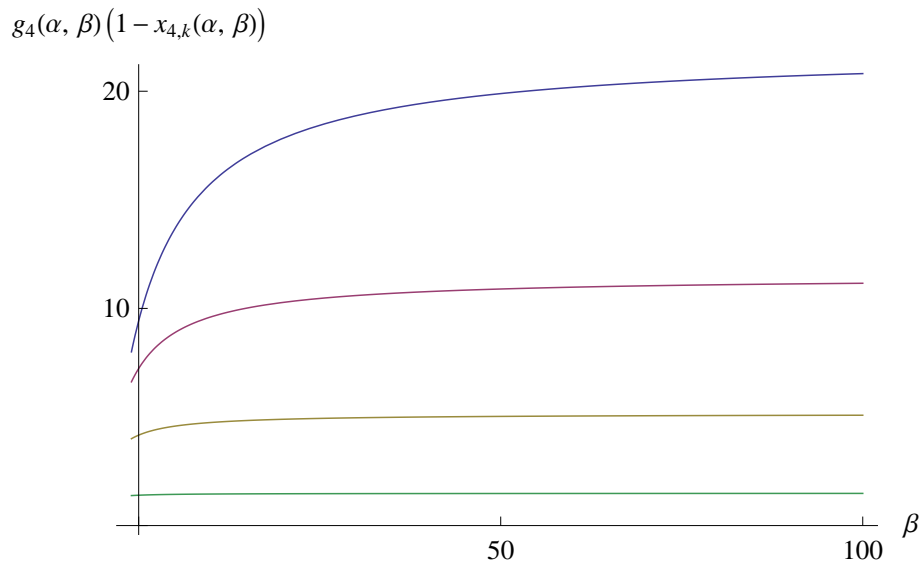
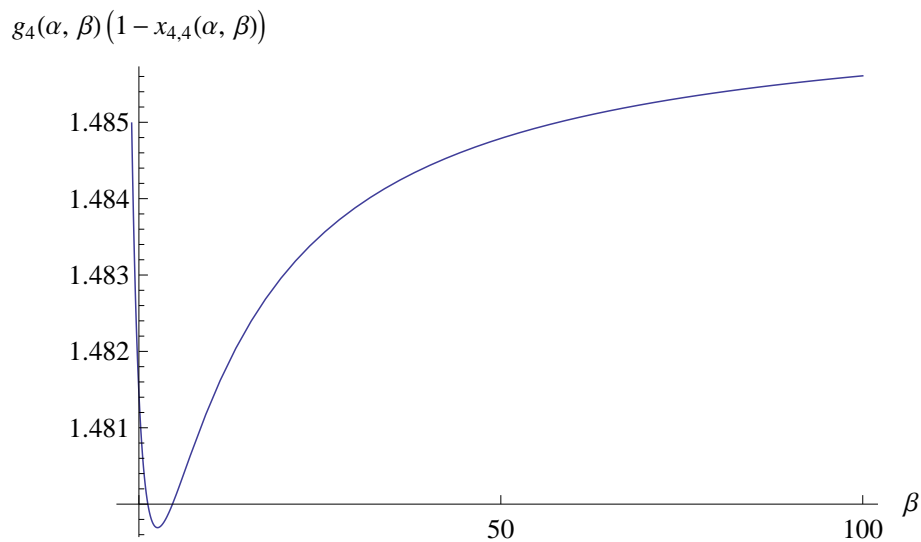


Figura 4.4: Gráfico das quantidades  $1 - x_{4,k}(\alpha, \beta)$ .

Agora, multiplicando essas quantidades pela função  $g_4(\alpha, \beta)$ , os produtos  $g_4(\alpha, \beta)(1 - x_{4,k}(\alpha, \beta))$  já se tornam funções crescentes de  $\beta$ . Veja a Figura 4.5.


 Figura 4.5: Gráfico dos produtos  $g_4(\alpha, \beta)(1 - x_{4,k}(\alpha, \beta))$ .

Por exemplo, aumentando um pouco o valor da função  $g_4(\alpha, \beta)$ , o produto  $(g_4(\alpha, \beta) + \varepsilon)(1 - x_{4,4}(\alpha, \beta))$ , para  $\varepsilon$  pequeno, deixa de ser monótono, conforme mostra a Figura 4.6.


 Figura 4.6: Gráfico de  $(g_4(\alpha, \beta) + \varepsilon)(1 - x_{4,4}(\alpha, \beta))$  para um  $\varepsilon$  pequeno.

Como consequência do Teorema 4.12 e da fórmula assintótica (4.33), temos, também, o resultado a seguir.

**Corolário 4.6.** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha, \beta > -1$ . Então as desigualdades*

$$\{2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)\}(1 - x_{nk}(\alpha, \beta)) < 2(2n + \alpha + 1)x_{n,n-k+1}(\alpha)$$

*são válidas para todo  $k = 1, \dots, n$ .*

### 4.3.3 Zeros dos polinômios de Laguerre

Consideremos, finalmente, o Problema 4.3\* sobre os zeros dos polinômios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$ . Observe que as soluções dos problemas 4.1\* e 4.2\* foram motivadas pelas fórmulas assintóticas  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}$  e  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)) = 2x_{n,n-k+1}(\alpha)$ , respectivamente. Essas fórmulas mostram que as funções (4.27) e (4.35), ou seja,

$$\left(\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}\right)^{1/2} x_{n,k}(\lambda)$$

e

$$\left(\beta + \frac{2n^2 + (2n + 1)(\alpha + 1)}{2n + \alpha + 1}\right) (1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))$$

possuem assíntotas horizontais quando as variáveis  $\lambda$  e  $\beta$  tendem ao infinito.

Apesar de todas essas contribuições, o correspondente problema 4.3\* sobre o comportamento dos zeros  $x_{n,k}(\alpha)$  dos polinômios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  permanecia em aberto. O problema é que esses zeros não possuem assíntota e, além disso, a formulação do problema deve ser um pouco diferente, uma vez que o maior zero  $x_{n,1}(\alpha)$  cresce muito rapidamente em comparação com o menor zero  $x_{n,n}(\alpha)$ .

Nossos resultados, então, foram inspirados na fórmula assintótica

$$x_{n,k}(\alpha) \rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha}h_{n,k} + \frac{1}{3}(1 + 2n + 2h_{n,k}^2) + \mathcal{O}(1/\sqrt{\alpha}), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (4.39)$$

dada por F. Calogero [11] em 1978. Observe que E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas [32] provaram que  $x_{n,1}(\alpha)/(\alpha + 1)$  decresce com  $\alpha$ , para  $\alpha > -1$ . Isso e (1.3) implicam que  $x_{n,1}(\alpha) > (\alpha + 1)$ , o que é, infelizmente, uma desigualdade que segue também de  $x_{1,1}(\alpha) = \alpha + 1$  e da propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios ortogonais. P. Natalini e B. Palumbo [49] provaram que, para quaisquer valores de  $n$  e  $k$ , as funções  $x_{n,k}(\alpha)/(2n + \alpha + 1)$  são funções crescentes de  $\alpha$ , para  $\alpha \in (-1, \infty)$ . Além disso, eles estabeleceram dois

resultados adicionais sobre a monotonicidade de quocientes da forma  $x_{n,k}(\alpha)/\alpha^p$ , com  $p$  fixo e  $2 \leq p \leq 2n + 1$ .

Provamos o seguinte resultado que foi publicado em [18]:

**Teorema 4.15** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2009). *Para todo  $n \geq 2$  e  $k = 1, \dots, n$ , as quantidades*

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha - 1)}{\sqrt{2(n + \alpha - 1)}}$$

*são funções crescentes de  $\alpha$  para  $\alpha \geq -1/(n - 1)$ . Além disso, quando  $k = 1$ , a função acima cresce para todo  $\alpha \in (-1, \infty)$ .*

Uma vez que, pela fórmula assintótica (4.39), temos

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha - 1)}{\sqrt{2(n + \alpha - 1)}} \rightarrow h_{n,k}, \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

então, concluimos que:

**Corolário 4.7** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2009). *As desigualdades*

$$x_{n,k}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + \sqrt{2(n + \alpha - 1)}h_{n,k}$$

*são válidas para todo  $n \geq 2$ ,  $k = 1, \dots, n$  e qualquer  $\alpha \geq -1/(n - 1)$ . Além disso,*

$$x_{n,1}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + \sqrt{2(n + \alpha - 1)}h_{n,1},$$

*para todo  $\alpha > -1$ .*

Daí, os limites superiores para os zeros  $h_{n,k}$  dos polinômios de Hermite,  $H_n(x)$ , obtidos por I. Area, D. K. Dimitrov, E. Godoy e A. Ronveaux em [8], implicam em:

**Corolário 4.8.** *A desigualdade*

$$x_{n,1}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + \sqrt{2(n + \alpha - 1) \left\{ n - 2 + \sqrt{1 + (n - 2)^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n \cos + 2}} \right\} \cos \frac{\pi}{2n}}$$

*é válida para todo  $n \geq 2$  e  $\alpha \geq -1$ . Além disso, se  $n \geq 3$  é ímpar, então vale*

$$x_{n,1}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + \sqrt{2(n + \alpha - 1) \left\{ n - 2 + \sqrt{1 + (n - 1)(n - 3) \cos^2 \frac{2\pi}{n \cos + 1}} \right\} \cos \frac{\pi}{2n}}.$$



Foi provado por D. K. Dimitrov e G. Nikolov em [16] que  $h_{n,1} \leq \sqrt{2n-4}$  para  $n \geq 2$ . Desse fato, obtemos o resultado a seguir.

**Corolário 4.9.** *As desigualdades*

$$x_{n,1}(\alpha) \leq 2n + \alpha - 1 + 2\sqrt{(n-2)(n+\alpha-1)}$$

são válidas para todo  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1$ .

Esse limite superior para  $x_{n,1}(\alpha)$  é melhor do que aquele obtido por M. E. H. Ismail e X. Li em [35].

No intuito de ilustrar o resultado obtido no Teorema 4.15, fornecemos alguns gráficos. A Figura 4.7 mostra os zeros do polinômio de Laguerre de grau 4. Como vemos, todos eles são funções crescentes do parâmetro, mas não possuem assíntota. Por outro lado, as quantidades, para  $n = 4$  e  $1 \leq k \leq 4$ ,

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha - 1)}{\sqrt{2(n + \alpha - 1)}}$$

crescem com  $\alpha$  e, além disso, convergem para os zeros do polinômio de Hermite de grau 4, conforme mostra a Figura 4.8.

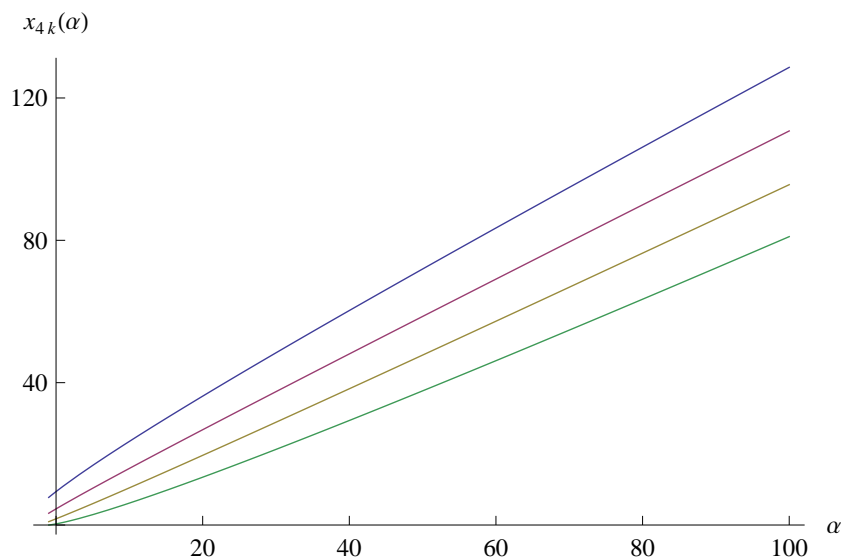


Figura 4.7: Gráfico de  $x_{4,k}(\alpha)$  para  $1 \leq k \leq 4$ .

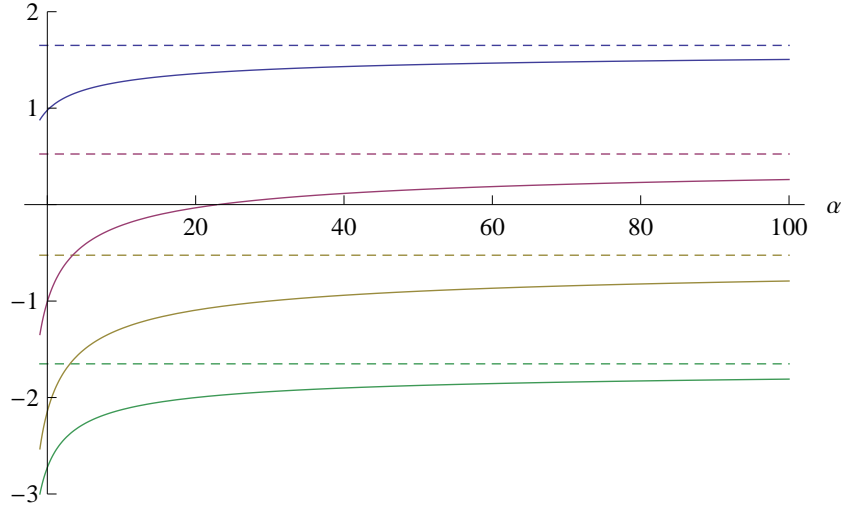


Figura 4.8: Gráfico de  $\frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha - 1)}{\sqrt{2(n + \alpha - 1)}}$  para  $n = 4$  e  $1 \leq k \leq 4$ .

Vários experimentos numéricos nos levaram à formulação da seguinte conjectura:

**Conjetura:** Para todo  $n \geq 2$  e  $k = 1, \dots, n$ , as quantidades

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - [\alpha + \frac{1}{3}(1 + 2n + h_{n,k}^2)]}{\sqrt{2(\alpha + n - 1)h_{n,k}}}$$

são funções decrescentes, enquanto que

$$\frac{x_{n,k}(\alpha) - [\alpha + \frac{1}{3}(1 + 2n + h_{n,k}^2)]}{\sqrt{2(\alpha + n + 1)h_{n,k}}}$$

são funções crescentes de  $\alpha \in (-1, \infty)$ .

A única exceção é quando  $n = 2m + 1$  é ímpar e  $k = m$ , pois essas funções não são definidas, já que os zeros dos polinômios de Hermite são simétricos.

## 4.4 Demonstração dos resultados

Demonstraremos, nesta seção, todos os resultados inéditos enunciados nas subseções 4.3.2 e 4.3.3 e publicados em [18] e [17], que são algumas das principais contribuições deste trabalho.

### 4.4.1 Demonstração dos resultados sobre os zeros dos polinômios de Jacobi

Iniciaremos com a prova dos resultados obtidos sobre os zeros  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  dos polinômios de Jacobi,  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , Teoremas 4.12 e 4.14. Resumindo, mostraremos que os produtos

$$t_{nk}(\alpha, \beta) = f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)),$$

com  $f_n(\alpha, \beta) = 2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)$ , são funções decrescentes de  $\beta$  e que, para todo  $\alpha$  fixo,  $\alpha > -1$ ,  $f_n(\alpha, \beta)$  é assintoticamente “extrema”. Para esse fim, necessitamos de algumas informações sobre funções cujos zeros coincidem com

$$\tilde{t}_{nk}(\alpha, \beta) = t_{nk}(\alpha, \beta)/2 = f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))/2.$$

Recordemos que a função  $u(x) = (1-x)^{\frac{\alpha+1}{2}}(1+x)^{\frac{\beta+1}{2}}P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  satisfaz à equação diferencial de Sturm-Liouville (ver (2.20))

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda(x; \alpha, \beta)u(x) = 0,$$

com

$$\lambda(x; \alpha, \beta) = \frac{1 - \alpha^2}{4(1-x)^2} + \frac{1 - \beta^2}{4(1+x)^2} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)/2}{1 - x^2}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis temos que

$$u(z) = z^{\frac{\alpha+1}{2}}(1-z)^{\frac{\beta+1}{2}}P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z),$$

cujos zeros  $z_{nk} = (1 - x_{n,k})/2$  estão em  $(0, 1)$ , é uma solução de

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + \Lambda(z; \alpha, \beta)u(z) = 0,$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda(z; \alpha, \beta) &= \frac{\alpha + \beta + 2}{2z(1-z)} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{z(1-z)} + \frac{\alpha + 1 - z(\alpha + \beta + 2)}{2z^2(1-z)} \\ &\quad - \frac{\alpha + 1 - z(\alpha + \beta + 2)}{2z(1-z)^2} - \frac{(\alpha + 1 - z(\alpha + \beta + 2))^2}{4z^2(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

**Lema 4.1.** A função  $U(t) = u(t/f)$ ,

$$U(t) = \left(\frac{t}{f}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \left(1 - \frac{t}{f}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - 2\frac{t}{f}\right)$$

é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta) U(t) = 0, \quad (4.40)$$

com

$$\tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{[f_n(\alpha, \beta)]^2} \Lambda\left(\frac{t}{f_n(\alpha, \beta)}; \alpha, \beta\right),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta) = & -\frac{\alpha + \beta + 2}{2t(t-f)} - \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{t(t-f)} + \frac{t(\alpha + \beta + 2) - (\alpha + 1)f}{2t(t-f)^2} \\ & + \frac{t(\alpha + \beta + 2) - (\alpha + 1)f}{2t^2(t-f)} - \frac{(t(\alpha + \beta + 2) - (\alpha + 1)f)^2}{4t^2(t-f)^2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Além disso, os zeros de  $U(t)$  são 0,  $f_n(\alpha, \beta)$  e  $\tilde{t}_{nk}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

#### Demonstração do Teorema 4.12 para $\beta \in (-1, 1)$

Para esse fim, demonstraremos, primeiramente, o seguinte resultado:

**Teorema 4.16** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2007). *Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > -1$  e  $f_n(\alpha, \beta)$  uma função definida e positiva para todo  $\beta \in I$ ,  $I \subset (-1, \infty)$ . Além disso, suponha que  $f_\beta = \partial f_n(\alpha, \beta)/\partial \beta$  exista, é continua e positiva para  $\beta \in I$ . Então, os produtos*

$$\tilde{t}_{nk}(\alpha, \beta) = f_n(\alpha, \beta) \frac{1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)}{2}$$

são funções crescentes de  $\beta$  em  $I$  se, para todo  $0 < t < f$ ,

$$A_n t^2 + B_n t + C_n < 0, \quad (4.42)$$

com  $A_n = 2n + \alpha + \beta + 1$ ,

$$B_n = [2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\beta + 1)]f_\beta - (4n + 2\alpha + \beta + 2)f$$

e

$$C_n = [(2n + \alpha + 1)f - (2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1))f_\beta] f.$$

*Demonstração.* Esse resultado segue do Teorema de Comparação de Sturm aplicado à equação diferencial de Sturm-Liouville (4.40). A versão utilizada é a do Corolário 3.1. Isso implica que os zeros da solução  $U(t)$  da equação diferencial (4.40),  $\tilde{t}_{nk}$ , são funções crescentes do parâmetro  $\beta$  se a derivada parcial de  $\tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta)$  com respeito a  $\beta$  é negativa para cada  $t \in (0, f)$  e  $\beta \in I$ . Assim, (4.41) implica em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Lambda}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= \frac{1}{2t(f-t)^3} \{ (2n + \alpha + \beta + 1)t^2 \\ &+ [(2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\beta + 1))f_\beta - (4n + 2\alpha + \beta + 2)f] t \\ &+ [(2n + \alpha + 1)f - (2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1))f_\beta] f \}, \end{aligned}$$

de onde obtemos a desigualdade (4.42).  $\square$

**Lema 4.2** (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaeli, 2007). *Se  $f_n(\alpha, \beta) = 2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)$  e  $\beta \in (-1, 1)$ , então a desigualdade (4.42) é válida.*

*Demonstração.* Substituindo a forma explícita de  $f_n(\alpha, \beta)$  no lado esquerdo de (4.42), obtemos o polinômio

$$r(t) = a_n(\alpha, \beta) t^2 - b_n(\alpha, \beta) t,$$

com  $a_n(\alpha, \beta) = 2n + \alpha + \beta + 1$  e

$$\begin{aligned} b_n(\alpha, \beta) &= 4n^3 + 6n^2(\alpha + \beta + 1) \\ &+ 2n(\alpha^2 + 3\alpha + 3 + 3(\alpha + 1)\beta) + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\beta + 1). \end{aligned}$$

Observe que o coeficiente livre do binômio em (4.42) se anula devido à própria escolha da função  $f$ . Obviamente o coeficiente  $a_n$  de  $t^2$  é sempre positivo e os zeros de  $r(t)$  são 0 e  $b_n(\alpha, \beta)/a_n(\alpha, \beta)$ . Além disso, o zero positivo excede  $f_n(\alpha, \beta)$  se, e somente se,  $a_n f_n < b_n$ . Por outro lado, essa desigualdade é equivalente a

$$\frac{(2n + \alpha + 1)(\beta^2 - 1)}{2n + \alpha + \beta + 1} < 0,$$

que é verdadeira para  $-1 < \beta < 1$ . Portanto, para esses valores de  $\beta$ ,  $r(t)$  é negativo para todo  $t \in (0, f)$ .  $\square$

Mostraremos, agora, como foi determinada a função  $f_n(\alpha, \beta)$  do Lema 4.2. Para esse propósito, suponhamos que  $f_n(\alpha, \beta)$  satisfaça todas as condições do Teorema 4.16. Então, dividindo (4.42) por  $[f_n(\alpha, \beta)]^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} & (2n + \alpha + \beta + 1) \left( \frac{t}{f} \right)^2 \\ & + \left\{ [2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\beta + 1)] \frac{f_\beta}{f} - (4n + 2\alpha + \beta + 2) \right\} \frac{t}{f} \\ & + \left\{ (2n + \alpha + 1) - [2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)] \frac{f_\beta}{f} \right\} < 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{f_\beta}{f} \geq F\left(\frac{t}{f}\right), \quad 0 < t < f, \quad (4.43)$$

com

$$F(u) = \frac{-u^2(2n + \alpha + \beta + 1) + u(4n + 2\alpha + \beta + 2) - (2n + \alpha + 1)}{(u - 1)D_n(\alpha, \beta) + (\beta^2 - 1)}$$

e

$$D_n(\alpha, \beta) = 2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\beta + 1).$$

Verifica-se facilmente que o denominador de  $F(u)$  é sempre negativo para  $0 < u < 1$  e  $-1 \leq \beta \leq -1$ .

Desta maneira, para que (4.43) seja válida para todo  $t$  em  $(0, f)$ , é necessário e suficiente que

$$\frac{f_\beta}{f} \geq \sup_{0 < u < 1} F(u). \quad (4.44)$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\sup_{0 < u < 1} F(u) = F(0). \quad (4.45)$$

Para provar (4.45), analisamos o comportamento da função  $F(u)$  em  $0 \leq u \leq 1$  e  $-1 \leq \beta \leq 1$ . Observe que  $F(u)$  é uma função racional, cujo numerador é um polinômio de grau 2 e o denominador é um polinômio de grau 1. Desta forma, podemos escrever  $F(u)$  como

$$F(u) = C_n(\alpha, \beta) \frac{(u - z_1)(u - z_2)}{u - p}, \quad (4.46)$$

com

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - \frac{\beta}{2n + \alpha + \beta + 1}, \quad p = 1 + \frac{1 - \beta^2}{D_n(\alpha, \beta)}$$

e

$$C_n(\alpha, \beta) = -\frac{2n + \alpha + \beta + 1}{D_n(\alpha, \beta)}.$$

Primeiramente, se  $\beta$  é um dos extremos,  $F(u)$  é uma função linear decrescente e, então, (4.45) é verificada. De fato,

(i) Se  $\beta = -1$ , então  $F(u) = C_n(\alpha, -1)(u - z_2)$ , com

$$C_n(\alpha, -1) = -\frac{2n + \alpha}{2n^2 + 2n\alpha} \quad \text{e} \quad z_2 = 1 + \frac{1}{2n + \alpha};$$

(ii) Se  $\beta = 1$ , então  $F(u) = C_n(\alpha, 1)(u - z_2)$ , com

$$C_n(\alpha, 1) = -\frac{2n + \alpha + 2}{2n^2 + 2n(\alpha + 2) + (\alpha + 1)} \quad \text{e} \quad z_2 = 1 - \frac{1}{2n + \alpha + 2}.$$

Por outro lado, se  $-1 < \beta < 1$ , a função  $F(u)$  possui duas raízes reais  $z_1$  e  $z_2$  e um pólo  $p$ . Agora, observe que

$$z_1 < p \quad \text{se, e somente se,} \quad D_n(\alpha, \beta) > 0,$$

ou seja, a raiz  $z_1$  está localizada à esquerda do pólo  $p$ . Em relação à raiz  $z_2$ , temos que

$$p - z_2 = \frac{R_n(\alpha, \beta)}{(2n + \alpha + \beta + 1)D_n(\alpha, \beta)}, \quad (4.47)$$

com

$$R_n(\alpha, \beta) = 2n^2\beta + 2n(\beta + \alpha\beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1).$$

Podemos, então, considerar dois casos:

1. A raiz  $z_2$  esta à direita do pólo  $p$ ;
2. A raiz  $z_2$  esta à esquerda do pólo  $p$ .

Da igualdade (4.47), segue que

$$\begin{aligned} p - z_2 < 0 \quad &\text{se, e somente se,} \quad R_n(\alpha, \beta) < 0; \\ p - z_2 > 0 \quad &\text{se, e somente se,} \quad R_n(\alpha, \beta) > 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Vamos determinar, agora, os pontos críticos da função  $F(u)$ . Derivando  $F(u)$ , obtemos

$$F'(u) = \frac{V_n(\alpha, \beta)}{[D_n(\alpha, \beta)(u-1) + (\beta^2 - 1)]^2} = C_n(\alpha, \beta) \frac{(u - \xi_1)(u - \xi_2)}{(u - p)^2},$$

com

$$\begin{aligned} V_n(\alpha, \beta) &= \beta(1 - \beta^2) + 2(u-1)(\beta^2 - 1)(2n + \alpha + \beta + 1) \\ &\quad - (u-1)^2(2n + \alpha + \beta + 1)D_n(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

um polinômio de grau 2.

Se  $\Delta_V$  é o discriminante de  $V_n(\alpha, \beta)$ , então

$$\Delta_V = -4(\beta^2 - 1)(2n + \alpha + \beta + 1)R_n(\alpha, \beta). \quad (4.49)$$

Sabemos que:

- $\Delta_V < 0$  se, e somente se,  $V_n(\alpha, \beta)$  não possui raízes reais;
- $\Delta_V \geq 0$  se, e somente se,  $V_n(\alpha, \beta)$  possui raízes reais.

Assim, de (4.48) e (4.49), segue que

- $\Delta_V < 0$  se, e somente se,  $R_n(\alpha, \beta) < 0$  se, e somente se,  $p - z_2 < 0$ ;
- $\Delta_V > 0$  se, e somente se,  $R_n(\alpha, \beta) > 0$  se, e somente se,  $p - z_2 > 0$ .

Observe, ainda, que  $F(u)$  não possui assíntotas horizontais pois

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} F(u) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = -\infty. \quad (4.50)$$

Logo, dessas observações, concluímos que:

- (i) Se  $\Delta_V < 0$ , a função  $F(u)$  não possui pontos críticos ( $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ) e a raiz  $z_2$  está localizada à direita do pólo  $p$ . Assim, desses fatos e de (4.50), concluímos que  $F(u)$  é uma função decrescente em todo o seu domínio e, portanto, (4.45) é verificada;
- (ii) Se  $\Delta_V > 0$ , a função  $F(u)$  possui dois pontos críticos ( $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ ) e a raiz  $z_2$  está localizada à esquerda do pólo  $p$ . Precisamos então determinar a localização dos pontos



críticos  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Pelo teorema de Rolle, um dos pontos críticos está entre as raízes  $z_1$  e  $z_2$  de  $F(u)$ . Em relação a  $\xi_2$ , observe que

$$\xi_2 - p = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{R_n(\alpha, \beta)}}{\sqrt{(2n + \alpha + \beta + 1)} \sqrt{D_n(\alpha, \beta)}} > 0.$$

Portanto,  $\xi_2$  está à direita do pólo  $p$ . Assim, podemos considerar três possibilidades:

1.  $0 < z_1 < \xi_1 < z_2 < p < \xi_2$ ;
2.  $0 < z_1 = \xi_1 = z_2 < p < \xi_2$ ;
3.  $0 < z_2 < \xi_1 < z_1 < p < \xi_2$ .

Logo, dessas observações e de (4.50), concluímos que, em qualquer um dos casos descritos, (4.45) é verificada.

Portanto, para  $-1 \leq \beta \leq 1$ , a desigualdade (4.44) é equivalente a

$$\frac{f'_n(\alpha, \beta)}{f_n(\alpha, \beta)} \geq \frac{\alpha + 2n + 1}{2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1)}, \quad (4.51)$$

de onde segue que

$$f_n(\alpha, \beta) = 2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1),$$

como queríamos demonstrar. □

### Demonstração do Teorema 4.12 para $\beta \in (1, \infty)$

Até o momento, provamos o Teorema 4.12 apenas para  $\beta \in (-1, 1)$ , ou seja, em um pequeno intervalo. A fim de estender a prova para todo  $\beta > -1$ , precisamos determinar explicitamente o valor das integrais  $I_\nu = I_\nu(n, \alpha, \beta)$ , com

$$I_\nu = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-\nu} \{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}^2 dx, \quad \alpha > -1, \quad \beta > \nu - 1.$$

Mais precisamente, faremos uso de  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$ . As integrais  $I_0$  e  $I_1$  são conhecidas, uma vez que

$$I_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$$

é dada por (2.16) (ver também [57, p. 68]) e

$$I_1 = \frac{2^{\alpha+\beta}}{n!\beta} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

é consequência da fórmula 7.391(5) em [28], ou seja,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta}}{n!\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

e da relação (2.15), isto é,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x). \quad (4.52)$$

Observe, ainda, que a integral

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\rho} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \frac{2^{\beta+\rho+1} \Gamma(\rho+1) \Gamma(n+\beta+1) \Gamma(n+\alpha-\rho)}{n! \Gamma(\alpha-\rho) \Gamma(n+\beta+\rho+2)},$$

que aparece como item 7.391(4) em [28], e (4.52) implicam em

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\rho} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \\ &= (-1)^n \frac{2^{\alpha+\rho+1} \Gamma(\rho+1) \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta-\rho)}{n! \Gamma(\beta-\rho) \Gamma(n+\alpha+\rho+2)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

e essa integral é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha, \rho > -1$ .

**Lema 4.3.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > -1$  e  $\beta > 1$ , tem-se*

$$I_2 = \frac{2^{\alpha+\beta-1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{2n(n+\alpha+\beta+1) + (\alpha+\beta)(\beta+1)}{\beta(\beta-1)(\beta+1)}.$$

*Demonstração.* Da relação (4.52) e da expressão (2.21) para  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k} \frac{1}{k!} \frac{(1+x)^k}{2^k}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\nu} &= \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta-\nu} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx \\ &= \frac{(-1)^n (\beta+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{2^k k! (\beta+1)_k} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta+k-\nu} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx. \end{aligned}$$

As formas explícitas de  $I_1$  e  $I_2$  são consequências dessa última expressão e de (4.53). Em particular, para  $I_2$  temos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{n!} \left\{ \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-2} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\beta+1)} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \right\}. \\
 &= (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{n!} \left\{ (-1)^n \frac{2^{\alpha+\beta-1}}{n!} \frac{\Gamma(\beta-1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(2)\Gamma(n+\alpha+\beta)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\beta+1)} (-1)^n \frac{2^{\alpha+\beta}}{n!} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \right\} \\
 &= \frac{2^{\alpha+\beta-1}(\beta+1)_n}{n!} \frac{\Gamma(\beta-1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \\
 &\quad \times \left\{ (n+1)(n+\alpha+\beta) - \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{\beta+1}(\beta-1) \right\} \\
 &= 2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{2n(n+\alpha+\beta+1) + (\alpha+\beta)(\beta+1)}{\beta(\beta+1)(\beta-1)}.
 \end{aligned}$$

□

Mostraremos, agora, que, para a função  $f_n(\alpha, \beta)$  do Lema 4.2, os produtos  $\tilde{t}_{nk}(\alpha, \beta)$  também são funções crescentes de  $\beta$  para  $\beta \in (1, \infty)$ . Para isso, usaremos a Fórmula de Richardson dada no Teorema 3.2. Como  $\partial \tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta) / \partial \beta$  é contínua em  $(0, f)$  e  $U(0) = 0$ , aplicando a fórmula (3.3) para as derivadas dos zeros  $\tilde{t}_{nk}$  da solução  $U(t)$  da equação diferencial (4.40), segue que

$$\left[ \frac{\partial U(t; \alpha, \beta)}{\partial t} \Big|_{t=\tilde{t}_{nk}} \right]^2 \frac{\partial \tilde{t}_{nk}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = - \int_0^{\tilde{t}_{nk}} \frac{\partial \tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta)}{\partial \beta} U^2(t; \alpha, \beta) dt.$$

Substituindo as expressões de  $U(t; \alpha, \beta)$  e  $\tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta)$  na integral

$$- \int_0^{\tilde{t}_{nk}} \frac{\partial \tilde{\Lambda}(t; \alpha, \beta)}{\partial \beta} U^2(\alpha, \beta; t) dt,$$

obtemos

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial t} \right]^2 \frac{\partial \tilde{t}_{nk}}{\partial \beta} = - \int_0^{\tilde{t}_{nk}} \frac{r(t)}{2t(f-t)^3} \left( \frac{t}{f} \right)^{\alpha+1} \left( 1 - \frac{t}{f} \right)^{\beta+1} \left\{ P_n^{(\alpha,\beta)} \left( 1 - 2\frac{t}{f} \right) \right\}^2 dt,$$

com  $r(t)$  sendo exatamente o polinômio definido na prova do Lema 4.2. Investigaremos, agora, a função

$$\Phi(\tau) = - \int_0^\tau \frac{r(t)}{2t(f-t)^3} \left(\frac{t}{f}\right)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{f}\right)^{\beta+1} \left\{P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - 2\frac{t}{f}\right)\right\}^2 dt.$$

Observe que o integrando muda de sinal se, e somente se,  $r(t)$  também muda. Todavia, na prova do Lema 4.2 mostramos que isso acontece somente quando  $t = b_n/a_n$ . Por outro lado, lembrando novamente a investigação do comportamento deste quociente e o fato que, agora,  $\beta > 1$ , vemos que, nesse caso,  $b_n/a_n < f$ . Resumindo, concluímos que  $\Phi(\tau)$  é uma função crescente de  $\tau$  em  $(0, b_n/a_n)$  e decrescente em  $(b_n/a_n, f)$ .

Provemos que  $\Phi(f) = 0$ . Fazendo a mudança de variáveis  $t = f(1-x)/2$  na integral que representa  $\Phi(f)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= A \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta-2} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx \\ &\quad + B \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta-1} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx, \end{aligned}$$

com

$$A = \frac{(1-\beta^2)(2n+\alpha+1)}{2^{\alpha+\beta+1}f^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+2}f}.$$

Então, como

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^\mu \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx = \\ &2 \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\mu \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\mu+1} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= 2A \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-2} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx \\ &\quad + (2B - A) \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-1} \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx \\ &\quad - B \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,  $\Phi(f) = 2AI_2 + (2B - A)I_1 - BI_0 = 0$ .

Portanto,  $\Phi(\tau) > 0$  para todo  $\tau \in (0, f)$  e, em particular,  $\Phi(\tilde{t}_{nk}) > 0$ . Isso mostra que os zeros  $\tilde{t}_{nk}(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $\beta$  para todo  $\beta > 1$ .

### Demonstração do Teorema 4.14

Empregaremos, para a demonstração desse resultado, o método desenvolvido em [19], que é baseado no critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, também descrito no Capítulo 3.

Relembremos que os polinômios de Jacobi podem ser representados em termos da função hipergeométrica

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

com  $(\gamma)_k$  sendo o símbolo de Pochhammer definido por  $(\gamma)_k = \gamma \cdots (\gamma + k - 1)$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , ou seja (ver (2.21)),

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - x}{2}\right). \quad (4.54)$$

Desde que  $y(z) = F(a, b; c; z)$  satisfaz à equação diferencial

$$z(1 - z)y'' + [c - (a + b + 1)z]y' - aby = 0,$$

o polinômio de Jacobi  $Y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  é uma solução de

$$(1 - x^2)Y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]Y' + n(n + \alpha + \beta + 1)Y = 0.$$

Introduzimos, então, o polinômio

$$q_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} P_n^{(\alpha, \beta)}(2y + 1).$$

Logo,

$$q_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k} y^k \quad (4.55)$$

e seus zeros  $y_{n,k}(\alpha, \beta)$  são dados por  $y_{n,k}(\alpha, \beta) = (x_{n,k}(\alpha, \beta) - 1)/2$ . Além disso, os polinômios  $q_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  são ortogonais em  $(-1, 0)$  e todos os zeros  $y_{n,k}(\alpha, \beta)$  pertencem a esse intervalo. Portanto, os zeros do polinômio  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(y) := q_n^{(\alpha, \beta)}(y/h)$ , com  $h = h_n(\alpha, \beta)$ , são precisamente  $h_n(\alpha, \beta) (x_{n,k}(\alpha, \beta) - 1)/2$ ,  $k = 1, \dots, n$ . É claro que

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_j}{(\alpha + 1)_j} \frac{1}{h_n^j(\alpha, \beta)} y^j.$$

Assim, os produtos  $h_n(\alpha, \beta)(x_{n,k}(\alpha, \beta) - 1)/2$  são funções decrescentes de  $\beta$  se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, os polinômios  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  e  $Q_n^{(\alpha, \beta + \epsilon)}(y)$  formam um par positivo. Isso é equivalente a  $\tilde{Q}_n^{(\alpha, \beta + \epsilon)}(y)$  e  $\tilde{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  formarem um par positivo, com  $\tilde{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(y) = y^n Q_n^{(\alpha, \beta)}(1/y)$  denotando a inversa de  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(y)$ . Seja  $\tilde{H}_n := \tilde{H}_n(Q_n; \alpha, \beta, \epsilon)$  a matriz de Hurwitz associada ao polinômio  $\tilde{Q}_n^{(\alpha, \beta + \epsilon)}(y^2) + y\tilde{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(y^2)$ ,

$$\tilde{H}_n = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} \frac{(n + \alpha + \beta + \epsilon + 1)_1}{(\alpha + 1)_1 h_n(\alpha, \beta + \epsilon)} & \binom{n}{2} \frac{(n + \alpha + \beta + \epsilon + 1)_2}{(\alpha + 1)_2 h_n^2(\alpha, \beta + \epsilon)} & \cdots \\ 1 & \binom{n}{1} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_1}{(\alpha + 1)_1 h_n(\alpha, \beta)} & \binom{n}{2} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_2}{(\alpha + 1)_2 h_n^2(\alpha, \beta)} & \cdots \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} \frac{(n + \alpha + \beta + \epsilon + 1)_1}{(\alpha + 1)_1 h_n(\alpha, \beta + \epsilon)} & \cdots \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_1}{(\alpha + 1)_1 h_n(\alpha, \beta)} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 3.5 (ver também Theorem 2.1 (ii) em [19]) para esse caso, segue que todos os  $h_n(\alpha, \beta)(x_{n,k}(\alpha, \beta) - 1)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , são funções crescentes de  $\beta$  se, e somente se, todos os menores  $\tilde{\Delta}_j(Q_n; \alpha, \beta, \epsilon)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n + 1$ , de  $\tilde{H}_n(Q_n; \alpha, \beta, \epsilon)$  são positivos para qualquer  $\epsilon$  positivo e suficientemente pequeno. Por outro lado, observe que  $\tilde{\Delta}_2(Q_n; \alpha, \beta, \epsilon)$  é positivo se, e somente se,

$$(n + \alpha + \beta + 1)\{h_n(\alpha, \beta + \epsilon) - h_n(\alpha, \beta)\} - \epsilon h_n(\alpha, \beta) > 0,$$

o que é equivalente a

$$\frac{1}{h_n(\alpha, \beta)} \frac{h_n(\alpha, \beta + \epsilon) - h_n(\alpha, \beta)}{\epsilon} > \frac{1}{n + \alpha + \beta + 1}.$$

Fazendo  $\epsilon$  tender a zero, obtemos a primeira parte do Teorema 4.14.

Isso nos diz que, se  $h_n$  é uma função extrema, então  $h_n$  deve ser linear com relação a  $\beta$ . Então, fazemos  $h_n(\alpha, \beta) = \beta + n + (\alpha + 1)/2 + d$ ,  $d = d_n(\alpha)$ . Substituindo essa expressão na matriz de Hurwitz e calculando seu terceiro menor principal  $\tilde{\Delta}_3 = \tilde{\Delta}_3(Q_n; \alpha, \beta, \epsilon)$ , obtemos

$$\tilde{\Delta}_3 = \frac{2n}{(\alpha + 1)^2} \frac{\epsilon\{4A(n, \alpha, \epsilon, d)\beta^2 + 2B(n, \alpha, \epsilon, d)\beta + C(n, \alpha, \epsilon, d)\}}{(\alpha + 2)(2n + \alpha + 2\beta + 2d + 1)^2(2n + \alpha + 2\beta + 2\epsilon + 2d + 1)^2},$$

com  $A(n, \alpha, \epsilon, d) = (1 + \alpha)(2 + \alpha) - 2d(1 + n + \alpha)$ . Desde que o denominador do quociente que representa  $\tilde{\Delta}_3$  é obviamente positivo, então esse menor é positivo para todo valor de

$\beta$  suficientemente grande quando  $A(n, \alpha, \epsilon, d)$  é positivo. Todavia, isso é equivalente à desigualdade

$$d < \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2(n + \alpha + 1)},$$

o que completa a prova do Teorema 4.14.

## 4.4.2 Demonstração dos resultados sobre os zeros dos polinômios de Laguerre

### Demonstração do Teorema 4.15

Para provarmos o Teorema 4.15 sobre os zeros dos polinômios de Laguerre, um dos principais resultados desta tese, recorreremos à relação de recorrência para os polinômios ortonormais de Laguerre na forma simétrica

$$L_{-1}(x; \alpha) = 0, \quad L_0(x; \alpha) = 1, \tag{4.56}$$

$$xL_j(x; \alpha) = a_j(\alpha)L_{j+1}(x; \alpha) + b_j(\alpha)L_j(x; \alpha) + a_{j-1}(\alpha)L_{j-1}(x; \alpha), \quad j \geq 0,$$

com

$$b_j(\alpha) = 2j + \alpha + 1 \quad \text{e} \quad a_{j-1}(\alpha) = \sqrt{j(j + \alpha)}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Tendo em mente a fórmula assintótica de F. Calogero (4.39), o objetivo é determinar as melhores constantes  $c$ ,  $d_1$  e  $d_2$  tais que as quantidades

$$z_{n,k}(\alpha) = \frac{x_{n,k}(\alpha) - (2n + \alpha + c)}{\sqrt{d_1\alpha + d_2}} \tag{4.57}$$

convergem monotonicamente, como funções de  $\alpha$ , para  $\sqrt{2}h_{n,k}$ . Fazendo a mudança de variáveis  $x = \sqrt{d_1\alpha + d_2}z + 2n + \alpha + c$  em (4.56), obtemos a nova sequência de polinômios ortogonais  $\{\tilde{L}_j(z)\}_{j=1}^n$  gerados pela relação de recorrência

$$\tilde{L}_{-1}(z) = 0, \quad \tilde{L}_0(z) = 1, \tag{4.58}$$

$$z\tilde{L}_j(z) = \tilde{a}_j\tilde{L}_{j+1}(z) + \tilde{b}_j\tilde{L}_j(z) + \tilde{a}_{j-1}\tilde{L}_{j-1}(z), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

com

$$\tilde{b}_j = \frac{2(j - n) + 1 - c}{\sqrt{d_1\alpha + d_2}} \quad \text{e} \quad \tilde{a}_{j-1} = \sqrt{\frac{j(j + \alpha)}{d_1\alpha + d_2}}.$$

Além disso, os zeros  $z_{n,k}(\alpha)$  de  $\tilde{L}_n(z)$  são as quantidades descritas em (4.57).

Agora, observe que

$$\tilde{b}'_j = \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial \alpha} = \frac{d_1 \{2(n-j) + c - 1\}}{2(d_1 \alpha + d_2)^{3/2}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

e

$$\tilde{a}'_{j-1} = \frac{\partial \tilde{a}_{j-1}}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{j}(d_2 - jd_1)}{2(j + \alpha)^{1/2}(d_1 \alpha + d_2)^{3/2}}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Escolhendo  $c = -1$ ,  $d_1 = 1$  e  $d_2 = n - 1$ , obviamente  $\tilde{b}'_j \geq 0$  e  $\tilde{a}'_j \geq 0$  quando  $\alpha > -1$  e  $j \leq n - 1$ . Assim, o Teorema de Perron-Frobenius 3.6 implica no Teorema 4.15 para o maior zero de  $L_n^{(\alpha)}(x)$ .

Novamente, para  $c = -1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = n - 1$  e  $j = 1, \dots, n - 1$ , vemos que as condições  $4[\tilde{a}'_{j-1}]^2 \leq \tilde{b}'_{j-1}\tilde{b}'_j$  do Teorema 3.2 são equivalentes a  $\alpha \geq -j/(n - j)$  e essas desigualdades são válidas para  $j = 1, \dots, n - 1$  desde que  $\alpha \geq -1/(n - 1)$ . Isso completa a prova do teorema.  $\square$



# Capítulo 5

## Zeros de polinômios ortogonais relacionados a medidas clássicas

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos em [14], [15] e [44].

Estruturamos este capítulo da seguinte maneira:

- Na Seção 5.1 fornecemos alguns resultados sobre a localização dos zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev generalizado relacionados com as medidas clássicas.
- Na Seção 5.2 apresentamos um estudo sobre a localização e comportamento dos zeros de polinômios ortogonais gerados por uma perturbação na medida dos polinômios ortogonais clássicos.
- Na Seção 5.3 apresentamos um estudo sobre a localização e comportamento dos zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev também relacionados com as medidas clássicas.

As demonstrações da maioria dos principais teoremas foram obtidas diretamente do Teorema 3.9.

## 5.1 Zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev generalizados

Nesta seção, estudaremos polinômios ortogonais com relação a produtos escalares do tipo Sobolev generalizado

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Sigma} p(x)q(x)d\mu(x) + \sum_{i=0}^k M_i p^{(i)}(c)q^{(i)}(c), \quad (5.1)$$

com  $\mu$  sendo uma medida de Borel positiva com suporte  $\Sigma$ , um subconjunto de  $\mathbb{R}$  com infinitos pontos,  $c \in \mathbb{R}$  e  $M_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Nos últimos 30 anos, vários autores estudaram polinômios ortogonais com relação a produtos da forma (5.1) (ver, por exemplo, [3], [4], [5], [6], [7], [9], [38], [42], [43], [47] e [48]). Um dos principais temas de pesquisa é o comportamento dos zeros desses polinômios com relação as massas  $M_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Para o caso em que  $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ ,  $d\mu(x) = x^\alpha e^{-x} dx$  ou  $d\mu(x) = e^{-x^2} dx$ , esses polinômios ortogonais são chamados de tipo Jacobi-Sobolev generalizado, tipo Laguerre-Sobolev generalizado e tipo Hermite-Sobolev generalizado, respectivamente. Em particular, essas questões foram consideradas por M. Alfaro, F. Marcellán e M. L. Rezola em [4] quando  $d\mu(x)$  é a medida de Jacobi e  $c = 1$ , por R. Álvarez-Nodarse e J. J. Moreno-Balcázar em [7] e F. Marcellán e J. J. Moreno-Balcázar em [42] quando  $d\mu(x)$  é a medida de Laguerre e  $c = 0$  e, por último, M. Alfaro, J. J. Moreno-Balcázar, A. Peña e M. L. Rezola [6] estudaram o caso em que  $d\mu(x)$  é a medida de Hermite e  $c = 0$ .

Nosso estudo consiste na localização dos zeros dos polinômios do tipo Jacobi-Sobolev generalizado,  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , dos zeros dos polinômios do tipo Laguerre-Sobolev generalizado,  $\{L_n^{(\alpha, M, N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , e dos zeros dos polinômios do tipo Hermite-Sobolev generalizado,  $\{H_n^{(\alpha, M_0, M_1, M_2, M_3)}(x)\}_{n \geq 0}$ , que são ortogonais com relação aos produtos escalares

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1) + Np'(1)q'(1), \quad (5.2)$$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + Np'(0)q'(0) \quad (5.3)$$

e

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)|x|^{2\alpha}e^{-x^2}dx + \sum_{i=0}^3 M_i p^{(i)}(0)q^{(i)}(0), \quad (5.4)$$

respectivamente. Provaremos que os zeros desses polinômios se entrelaçam com os zeros dos polinômios clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite e, além disso, mostraremos que há pelo menos  $n - 1$  zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$  em  $(-1, 1)$  e  $(0, +\infty)$ , respectivamente, e que esse fato depende apenas da massa  $N$  independentemente do valor da massa  $M$ , e que  $H_n^{(\alpha, M_0, M_1, M_2, M_3)}(x)$  pode ter um par de zeros complexos localizados no eixo imaginário, dependendo apenas dos valores das massas  $M_2$  e  $M_3$ . Estes são alguns dos resultados centrais da tese, descritos em [14], [15] e [44].

### 5.1.1 Polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev generalizados

Os polinômios do tipo Jacobi-Sobolev generalizado,  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1) + Np'(1)q'(1), \quad (5.5)$$

com  $\alpha, \beta > -1$  e  $M, N > 0$ .

Fornecemos, em [15], uma representação desses polinômios em termos dos polinômios de Jacobi clássicos, de uma maneira similar àquela apresentada em [4] (ver, também, [5, Proposição 2.2]).

**Teorema 5.1** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - A_1(1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + A_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (5.6)$$

com

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_0^{(M,N)}(n; \alpha, \beta) = 1 + AM + ACN + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)A^2BMN}{2(\alpha + 2)}, \\
 A_1 &= A_1^{(M,N)}(n; \alpha, \beta) = \frac{\alpha + 1}{n(n + \alpha + \beta + 1)}AM + \frac{(n - 1)(n + \alpha + \beta + 2)}{4(\alpha + 1)}AN + A^2BMN, \\
 A_2 &= A_2^{(M,N)}(n; \alpha, \beta) = \frac{1}{4(\alpha + 1)}AN + \frac{(\alpha + 3)A^2BMN}{2(n - 1)(n + \alpha + \beta + 2)},
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

e

$$\begin{aligned}
 A &= A(n; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n)}, \\
 B &= B(n; \alpha, \beta) = \frac{(n - 1)(n + \beta)(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 2)}{2n(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(n + \alpha + \beta + 1)}, \\
 C &= C(n; \alpha, \beta) = \frac{(n - 1)(n + \alpha + \beta + 2)(n(\alpha + 2)(n + \alpha + \beta + 1) - (\alpha + 1)\beta)}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

*Demonstração.* Seja  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)\}$  a sequência de polinômios definida por (5.6). Mostraremos que esses polinômios são ortogonais com relação ao produto interno (5.5). Denotemos por  $\mathbb{P}_n$  o conjunto dos polinômios de grau até  $n$  e seja  $p_{l+2}(x) = x^2q_l(x)$ ,  $l = 0, 1, \dots, n - 3$ , com  $q_l(x)$  sendo um polinômio de grau exatamente  $l$ . Assim, os polinômios  $1$ ,  $x$  e  $p_{l+2}(x)$ ,  $l = 0, 1, \dots, n - 3$ , formam uma base para  $\mathbb{P}_{n-1}$ . Então, para  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned}
 &\langle p_{l+2}, P_n^{(\alpha, \beta, M, N)} \rangle \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha+2}(1 + x)^\beta q(x) P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \left\{ A_0 \int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta (1 - x)^2 q(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \right. \\
 &\quad - \frac{(n + \alpha + \beta + 1)A_1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha+1} (1 + x)^{\beta+1} (1 - x) q(x) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) dx \\
 &\quad + \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2)A_2}{4} \\
 &\quad \left. \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha+2} (1 + x)^{\beta+2} q(x) P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x) dx \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

devido à propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi clássicos. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle 1, P_n^{(\alpha, \beta, M, N)} \rangle &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) dx \\
&\quad + M P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(1) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \left\{ A_0 \int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \right. \\
&\quad - \frac{(n + \alpha + \beta + 1) A_1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^{\beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha + 1, \beta + 1)}(x) dx \\
&\quad \left. + \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2) A_2}{4} \int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^{\beta + 2} P_{n-2}^{(\alpha + 2, \beta + 2)}(x) dx \right\} \\
&\quad + M \left[ A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(1) - 2A_1 \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} + 4A_2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} \right].
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\langle (1 - x), P_n^{(\alpha, \beta, M, N)} \rangle \\
&= \frac{2^{-\alpha - \beta - 1} \Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha + 1} (1 + x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) dx - N \left[ \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) \right] \Big|_{x=1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \left\{ A_0 \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha + 1} (1 + x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \right. \\
&\quad - \frac{(n + \alpha + \beta + 1) A_1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha + 1} (1 + x)^{\beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha + 1, \beta + 1)}(x) dx \\
&\quad \left. + \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2) A_2}{4} \int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha + 1} (1 + x)^{\beta + 2} P_{n-2}^{(\alpha + 2, \beta + 2)}(x) dx \right\} \\
&\quad - N \left[ (A_0 - A_1) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} - (2A_1 - 4A_2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} + 4A_2 \frac{d^3}{dx^3} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} \right].
\end{aligned}$$

Usando a fórmula

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^\rho (1 + x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{2^{\beta + \rho + 1} \Gamma(\rho + 1) \Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha - \rho)}{n! \Gamma(\alpha - \rho) \Gamma(n + \beta + \rho + 2)},$$

que é a expressão 7.391(4) em [28], e a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, obtemos, depois de alguns cálculos, que

$$\langle 1, P_n^{(\alpha, \beta, M, N)} \rangle = \langle (1 - x), P_n^{(\alpha, \beta, M, N)} \rangle = 0,$$

para  $A_0, A_1$  e  $A_2$  dados por (5.7). Isso mostra a ortogonalidade da sequência de polinômios  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , que é o resultado desejado.  $\square$

**Lema 5.1.** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e  $\alpha, \beta > -1$ . Se  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  é dado por (5.6), então*

$$A_0, A_1, A_2, A, B, C \geq 0. \quad (5.9)$$

Além disso, o coeficiente  $l_n^{M, N}(\alpha, \beta)$  de  $x^n$  em  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  é dado por

$$l_n^{M, N}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} [A_0 - nA_1 + n(n - 1)A_2]$$

e é positivo para todo  $M, N > 0$ .

*Demonstração.* As desigualdades (5.9) são óbvias. Por outro lado, para obter a fórmula explícita de  $l_n^{M, N}(\alpha, \beta)$ , usamos (5.6) e (2.13) e, para mostrar que  $l_n^{M, N}(\alpha, \beta)$  é positivo, é suficiente provar que

$$A_0 - nA_1 + n(n - 1)A_2 > 0.$$

Mas, essa última desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{(n + \beta)A}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2)} \\ & \times (n + \alpha + \beta + 1) \{ 4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)M \\ & + (n - 1)(n + \alpha + \beta + 1)[n(\alpha + 2)(n + \alpha + \beta) - (\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)]N \} \\ & + 2n(\alpha + 1)(\alpha + 3)(n + \beta - 1)(n + \alpha + \beta + 1)ABMN > 0 \end{aligned}$$

a qual é claramente verdadeira para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\alpha, \beta > -1$  e  $M, N > 0$ .  $\square$

Denotemos por  $x_{n, k}^{M, N}(\alpha, \beta)$  os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$ , todos arranjados em ordem crescente. Mostraremos que há pelo menos  $n - 1$  zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  em  $(-1, 1)$ . Ademais, forneceremos explicitamente o valor  $N_0$  da massa tal que, para  $N > N_0$ , o maior zero  $x_{n, n}^{M, N}(\alpha, \beta)$  é maior do que 1. É muito curioso que esse fato acontece independentemente do valor da massa  $M$ . Além disso, mostraremos, também, que os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  se entrelaçam com os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .

Para o nosso propósito, precisamos do seguinte lema:

**Lema 5.2** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha, \beta > -1$ ,*

$$x_{n,n}(\alpha, \beta) < 1 - \frac{2(\alpha + 1)}{n(n + \alpha + \beta + 1)}.$$

*Demonstração.* Seja  $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  o polinômio clássico de Jacobi com a seguinte normalização:

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1.$$

Assim, de (2.21), temos

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right), \text{ com } {}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k$$

denotando a função hipergeométrica de Gauss, e

$$\frac{d}{dx} \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} = \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{2(\alpha + 1)}.$$

Seja  $1 - \delta$  o ponto de intersecção da reta tangente a  $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  no ponto  $(1, \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(1))$  com a reta real. Desde que  $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  é uma função convexa para  $x > x_{n,n}(\alpha, \beta)$ , concluímos que  $x_{n,n}(\alpha, \beta) < 1 - \delta$ . Por outro lado,

$$\frac{d}{dx} \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} = \frac{\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{\delta}$$

e isso implica que

$$\delta = \frac{2(\alpha + 1)}{n(n + \alpha + \beta + 1)},$$

de onde segue o resultado desejado.  $\square$

**Teorema 5.2** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$-1 < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}^{M,N}(\alpha, \beta) < \dots < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) \quad (5.10)$$

*são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\alpha, \beta > -1$  e  $M, N > 0$ . Além disso, para todo  $n$  fixo, o maior zero  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta)$  satisfaz*

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) < 1, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) = 1, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) > 1, \quad \text{para } N > N_0,$$

com

$$N_0 = \frac{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{(n - 1)(n + \beta)(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 2)A}. \quad (5.11)$$

*Demonstração.* Usando (5.6), temos

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \Omega_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (5.12)$$

com

$$\Omega_n^{(\alpha, \beta)}(x) = A_1(1 + x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - A_2(1 + x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Por outro lado, (2.17) e (2.18) implicam em

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = T_0(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - T_1(x) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \frac{(n + \alpha)(n + \beta)A}{n(n - 1)(\alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)(x - 1)^2} \\ &\times \{ (n - 1)(n + \alpha + \beta + 2)[4M(\alpha + 1)^2(1 - x) + n(n + \alpha + \beta + 1)Nq(x)] \\ &+ 2n(\alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1)ABMNr(x) \}, \end{aligned}$$

onde  $q(x) = -2(\alpha + 1) + n(n + \alpha + \beta + 1)(1 - x)$  e

$$r(x) = -2(\alpha + 1)(\alpha + 3) + (1 - x)[2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\alpha + \beta + 2)].$$

Observe que os zeros de  $q(x)$  e  $r(x)$  são

$$q_1 = 1 - \frac{2(\alpha + 1)}{n(n + \alpha + \beta + 1)}$$

e

$$r_1 = 1 - \frac{2(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\alpha + \beta + 2)},$$

respectivamente. Como, para  $n \geq 2$ ,

$$r_1 - q_1 = \frac{2(n - 1)(\alpha + 1)^2(\alpha + 3)(n + \alpha + \beta + 2)}{n(n + \alpha + \beta + 1)[2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\alpha + \beta + 2)]} > 0$$



e, pelo Lema 5.2,  $x_{n,n}(\alpha, \beta) < q_1$ , concluímos que  $T_1(x) > 0$  para  $x < x_{n,n}(\alpha, \beta)$ . Assim, (5.12), (5.13) e a propriedade de entrelaçamento dos zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  e  $P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$  implicam em

$$\begin{aligned} -\text{sign} \left( P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) &= \text{sign} \left( \Omega_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) \\ &= \text{sign} \left( P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) = (-1)^{n-k}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Portanto, (5.14) implica que  $n - 1$  zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  se entrelaçam com os  $n$  zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , isto é,

$$-1 < x_{n,k}(\alpha, \beta) < x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta) < x_{n,k+1}(\alpha, \beta), \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Falta mostrar que  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) > x_{n,n}(\alpha, \beta)$ . De (5.14),

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x_{n,n}(\alpha, \beta)) < 0.$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1, o coeficiente  $l_n^{M,N}(\alpha, \beta)$  de  $x^n$  em  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  é positivo. Daí,  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) > x_{n,n}(\alpha, \beta)$ .

Para investigar a localização de  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta)$  com relação ao ponto  $x = 1$ , é suficiente observar que  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(1) = 0$  se, e somente se,  $N = N_0$ .  $\square$

É muito interessante observar que  $N_0$  não depende de  $M$ . A fim de ilustrar os resultados obtidos no Teorema 5.2, colocamos, na Figura 5.1, alguns gráficos de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$ , com  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1$  e  $M = 0.2$ , para vários valores de  $N$ .

A Tabela 5.1 mostra os zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$ , com  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1$  e  $M = 0.2$ , para vários valores de  $N$ . Agora, observe que, para  $N > N_0$ , o maior zero é maior do que 1. Ademais, parece que os zeros são funções crescentes de  $N$ . Alguns outros experimentos numéricos também indicam que esses zeros são funções crescentes de  $M$ . Formulamos, então, o seguinte problema:

**Conjectura 5.1.** *Para todo  $M > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $N$  e, para todo  $N > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $M$ .*

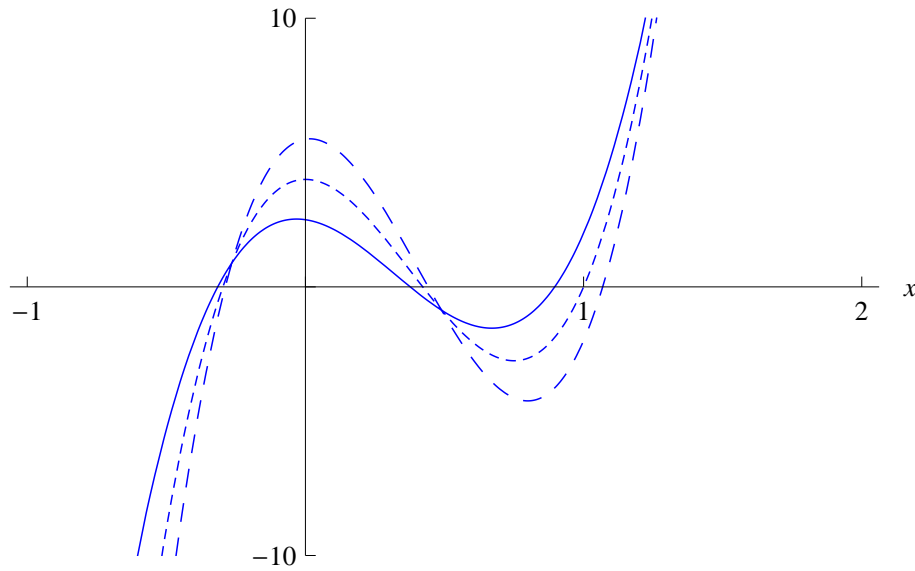


Figura 5.1: Gráfico de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  para alguns valores de  $N$ .

Tabela 5.1: Zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  para alguns valores de  $N$ .

$N$	$x_{3,1}^{0.2,N}(0.5, 1)$	$x_{3,2}^{0.2,N}(0.5, 1)$	$x_{3,3}^{0.2,N}(0.5, 1)$
0	-0.592666	0.16014	0.911199
1/100	-0.559182	0.26751	0.976279
$N_0 = 128/9009$	-0.551342	0.296797	1
1/2	-0.504285	0.490049	1.33242
1	-0.502834	0.495743	1.35248
5	-0.501641	0.500377	1.36972
10	-0.50149	0.500961	1.37196

### 5.1.2 Polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev generalizados

Os polinômios do tipo Laguerre-Sobolev generalizado,  $\{L_n^{(\alpha, M, N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + Np'(0)q'(0), \quad (5.15)$$

com  $\alpha > -1$  e  $M, N > 0$ . Eles foram definidos e estudados primeiramente por R. Koekoek e H. G. Meijer [38], em 1993. Lá, eles forneceram a seguinte fórmula de conexão:

**Teorema 5.3** (R. Koekoek e H. G. Meijer, 1993). *Os polinômios  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$  podem ser representados por*

$$L_n^{(\alpha, M, N)}(x) = A_0 L_n^{(\alpha)}(x) + A_1 \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) + A_2 \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x), \quad (5.16)$$

com

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0^{(M, N)}(n; \alpha) = 1 + M \binom{n + \alpha}{n - 1} + \frac{n(\alpha + 2) - (\alpha + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 3)} N \binom{n + \alpha}{n - 2} \\ &\quad + \frac{MN}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \binom{n + \alpha}{n - 1} \binom{n + \alpha + 1}{n - 2}, \\ A_1 &= A_1^{(M, N)}(n; \alpha) = M \binom{n + \alpha}{n} + \frac{n - 1}{\alpha + 1} N \binom{n + \alpha}{n - 1} \\ &\quad + \frac{2MN}{(\alpha + 1)^2} \binom{n + \alpha}{n} \binom{n + \alpha + 1}{n - 2}, \\ A_2 &= A_2^{(M, N)}(n; \alpha) = \frac{N}{\alpha + 1} \binom{n + \alpha}{n - 1} + \frac{MN}{(\alpha + 1)^2} \binom{n + \alpha}{n} \binom{n + \alpha + 1}{n - 1}. \end{aligned}$$

Denotemos por  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$  os zeros de  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$ , todos arranjados em ordem decrescente, isto é,  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha) < \dots < x_{n,1}^{M,N}(\alpha)$ . Foi provado em [38] que há pelo menos  $n - 1$  zeros de  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$  em  $(0, +\infty)$ . Mostraremos esse resultado de outra forma e, além disso, forneceremos explicitamente o valor  $N_0$  da massa tal que, para  $N > N_0$ , o menor zero  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha)$  é negativo, fato esse que não depende da massa  $M$ . Provaremos, também, que os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$  se entrelaçam com os zeros do polinômio de Laguerre,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , (ver [14]).

Para demonstrarmos o próximo teorema, precisamos do seguinte lema:

**Lema 5.3** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1$ ,*

$$nx_{n,k}(\alpha) - (\alpha + 1) > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

*Demonstração.* Sejam  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n$  e  $\alpha > -1$ . Então, usando a desigualdade (3.4)

dada em [35], obtemos

$$\begin{aligned} nx_{n,k}(\alpha) - (\alpha + 1) &\geq nx_{n,n}(\alpha) - (\alpha + 1) \\ &> (n-1)(2n + \alpha - 1) - n\sqrt{1 + a(n-1)(n + \alpha - 1)}, \end{aligned}$$

com  $a = 4\cos^2(\pi/(n+1))$ . Observe que

$$(n-1)(2n + \alpha - 1) - n\sqrt{1 + a(n-1)(n + \alpha - 1)} > 0$$

é equivalente a

$$a_n\alpha^2 + b_n\alpha + c_n > 0, \quad (5.17)$$

com

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2, \\ b_n &= -(n-1)[(a-4)n^2 + 4n + 2], \\ c_n &= -(n-1)[(a-4)n^3 + (4-a)n^2 + 5n + 1]. \end{aligned}$$

As desigualdades (5.17) são verdadeiras para  $n = 2$  e  $n = 3$ , pois são equivalentes, respectivamente, a

$$(\alpha + 1)^2 > 0 \quad \text{e} \quad 4[(\alpha + 1)^2 + 9] > 0.$$

Agora, seja  $n \geq 4$ . É fácil ver que o coeficiente  $a_n$  de (5.17) é positivo e o discriminante  $b_n^2 - 4a_nc_n$  é igual a

$$n^2(n-1)^2[4(1+2a) - (4-a)an^2].$$

Provaremos, agora, que a expressão

$$\sigma(n) = 4(1+2a) - (4-a)an^2$$

é negativa para  $n \geq 4$ ,  $\alpha > -1$  e  $a = 4\cos^2(\pi/(n+1))$ . De fato,  $\sigma(n) < 0$  se, e somente se,

$$\frac{4(1+2a)}{a(4-a)} < n^2.$$

Tendo em mente que

$$2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta), \quad 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \sin^2(2\theta),$$

$$\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

e fazendo  $\pi = (n+1)\theta$ , obtemos

$$\frac{4(1+2a)}{a(4-a)} = \frac{5+4\cos 2\theta}{\sin^2(2\theta)} \leq \frac{9\pi^2}{16\theta^2} = \frac{9}{16}(n+1)^2.$$

Portanto,

$$\frac{4(1+2a)}{a(4-a)} \leq \frac{9}{16}(n+1)^2 < n^2$$

para todo  $n \geq 4$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Teorema 5.4** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) < x_{n,n}(\alpha) < \cdots < x_{n,1}^{M,N}(\alpha) < x_{n,1}(\alpha) \quad (5.18)$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\alpha > -1$  e  $M, N > 0$ . Além disso, para todo  $n$  fixo, o menor zero  $x_{n,n}^{M,N}(\alpha)$  satisfaz

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) > 0, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) = 0, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) < 0, \quad \text{para } N > N_0,$$

com  $N_0$  dado por

$$N_0 = \frac{(\alpha+1)\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \quad (5.19)$$

*Demonstração.* De (5.16), temos que

$$L_n^{(\alpha,M,N)}(x) = A_0 L_n^{(\alpha)}(x) - \Omega_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (5.20)$$

com

$$\Omega_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \Omega_{n-1}^{(\alpha,M,N)}(x) = -A_1 \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) - A_2 \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x).$$

Por outro lado, (2.26) e (2.27) implicam em

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha,M,N)}(x) &= \frac{1}{x^2} [A_0 x^2 + nA_1 x - n(\alpha+1)A_2] L_n^{(\alpha)}(x) \\ &\quad - \frac{(n+\alpha)}{x^2} [(A_1 + A_2)x - (\alpha+1)A_2] L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Agora, avaliando (5.20) e (5.21) em  $x = x_{n,k}(\alpha)$ , obtemos

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha, M, N)}(x_{n,k}(\alpha)) &= -\Omega_{n-1}^{(\alpha)}(x_{n,k}(\alpha)) \\ &= -\frac{(n+\alpha)}{[x_{n,k}(\alpha)]^2} [(A_1 + A_2)x_{n,k}(\alpha) - (\alpha+1)A_2] L_{n-1}^{(\alpha)}(x_{n,k}(\alpha)) \end{aligned} \quad (5.22)$$

para  $1 \leq k \leq n$ . Desde que  $A_1 = A_1^{(M, N)}(n; \alpha)$  e  $A_2 = A_2^{(M, N)}(n; \alpha)$  são funções crescentes de  $M$ , do Lema 5.3, temos que

$$\begin{aligned} &\left( A_1^{(M, N)}(n; \alpha) + A_2^{(M, N)}(n; \alpha) \right) x_{n,k}(\alpha) - (\alpha+1)A_2^{(M, N)}(n; \alpha) \\ &\geq \left( A_1^{(0, N)}(n; \alpha) + A_2^{(0, N)}(n; \alpha) \right) x_{n,k}(\alpha) - (\alpha+1)A_2^{(0, N)}(n; \alpha) \\ &= A_2^{(0, N)}(n; \alpha) \left[ \left( \frac{A_1^{(0, N)}(n; \alpha)}{A_2^{(0, N)}(n; \alpha)} + 1 \right) x_{n,k}(\alpha) - (\alpha+1) \right] \\ &= A_2^{(0, N)}(n; \alpha) [nx_{n,k}(\alpha) - (\alpha+1)] > 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\text{sign} \left( L_n^{(\alpha, M, N)}(x_{n,k}(\alpha)) \right) = -\text{sign} \left( L_{n-1}^{(\alpha)}(x_{n,k}(\alpha)) \right) = (-1)^{n+1-k}, \quad (5.23)$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Isso significa que  $n-1$  zeros de  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$  se entrelaçam com os  $n$  zeros de  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , isto é,

$$x_{n,k+1}(\alpha) < x_{n,k}^{M, N}(\alpha) < x_{n,k}(\alpha), \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Falta mostrar que  $x_{n,n}^{M, N}(\alpha) < x_{n,n}(\alpha)$ . É claro, de (5.23), que

$$L_n^{(\alpha, M, N)}(x_{n,n}(\alpha)) < 0.$$

Por outro lado, de (5.16) e (2.23), temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} L_n^{(\alpha, M, N)}(x) = +\infty.$$

Então,  $x_{n,n}^{M, N}(\alpha) < x_{n,n}(\alpha)$ . A fim de investigar a localização de  $x_{n,n}^{M, N}(\alpha)$  com relação à origem, é suficiente observar que  $L_n^{(\alpha, M, N)}(0) = 0$  se, e somente se,  $N = N_0$ .  $\square$

É curioso o fato de  $N_0$  não depender de  $M$ . Com o objetivo de ilustrar os resultados obtidos no Teorema 5.4, apresentamos, na Figura 5.2, alguns gráficos de  $L_3^{(\alpha, M, N)}(x)$ , com  $\alpha = 2$  e  $M = 0.1$ , para vários valores de  $N$ .

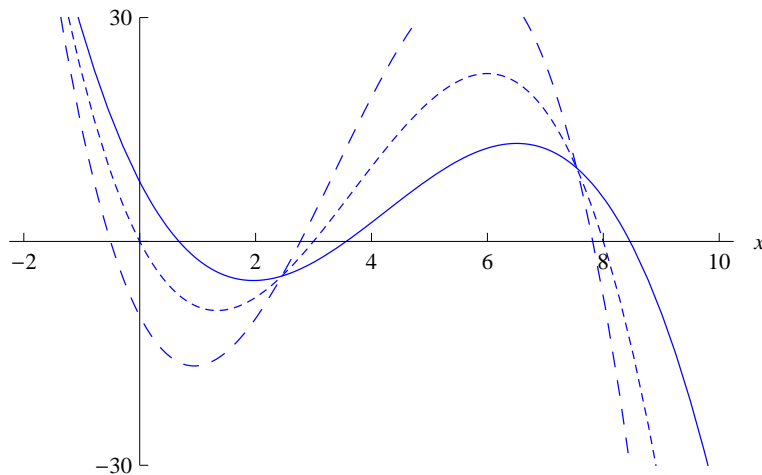

 Figura 5.2: Gráfico de  $L_3^{(\alpha, M, N)}(x)$  para alguns valores de  $N$ .

 Tabela 5.2: Zeros de  $L_3^{(\alpha, M, N)}(x)$  para alguns valores de  $N$ .

$N$	$x_{3,3}^{0.1,N}(2)$	$x_{3,2}^{0.1,N}(2)$	$x_{3,1}^{0.1,N}(2)$
0	0.887364	3.86467	8.74797
1/4	0.388762	3.26832	8.21248
$N_0 = 1/2$	0	3.0	8.0
3/2	-0.28764	2.85874	7.88836
1	-0.50292	2.77386	7.81997
5	-1.441	2.52628	7.60703
10	-1.63293	2.49114	7.57422

A Tabela 5.2 mostra os zeros de  $L_3^{(\alpha, M, N)}(x)$ , com  $\alpha = 2$  e  $M = 0.1$ , para vários valores de  $N$ . Agora, observe que, para  $N > N_0$ , o menor zero é negativo. Além disso, essa tabela indica que esses zeros são funções decrescentes de  $N$ . Alguns outros experimentos numéricos também mostram que esses zeros são funções decrescentes de  $M$ . Formulamos, então, o seguinte problema:

**Conjectura 5.2.** Para todo  $M > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$  são funções decrescentes de  $N$  e, para todo  $N > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$  são funções decrescentes de  $M$ .

Agora, sabemos que (ver (2.41))

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2\beta^{-1}y) = L_n^{(\alpha)}(y).$$

Se considerarmos a sequência de polinômios ortogonais  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M, \hat{N})}(x)\}$ , obtida de (5.5) substituindo  $N$  por  $4\hat{N}/(n + \alpha + \beta + 1)^2$ , então a última igualdade implica em

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta, M, \hat{N})}(1 - 2\beta^{-1}y) = L_n^{(\alpha, M, \hat{N})}(y), \quad (5.24)$$

com  $L_n^{(\alpha, M, \hat{N})}(x)$  sendo o  $n$ -ésimo polinômio do tipo Laguerre-Sobolev, ortogonal com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + \hat{N}p'(0)q'(0).$$

Portanto, os resultados obtidos na subseção 5.1.2 sobre os zeros de  $L_n^{(\alpha, M, \hat{N})}(x)$  são consequências dos teorema obtidos na subseção 5.1.1 e da relação de limite (5.24).

### 5.1.3 Polinômios ortogonais do tipo Hermite Sobolev generalizados

Consideremos, agora, os polinômios do tipo Hermite-Sobolev generalizado  $Q_n(x) = H_n^{(\alpha, M_0, M_1, M_2, M_3)}(x)$ , ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)e^{-x^2} dx + \sum_{i=0}^3 M_i p^{(i)}(0)q^{(i)}(0), \quad (5.25)$$

com  $\alpha > -1/2$  e  $M_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Note que este produto interno é simétrico, isto é,  $\langle x^{2n}, x^{2m+1} \rangle = 0$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ . Os polinômios de Hermite (generalizado) aparecem no processo de simetrização dos polinômios de Laguerre. Devido a esse fato, obtivemos, em [44], uma representação desses polinômios em termos dos polinômios do tipo Laguerre-Sobolev generalizado.

**Teorema 5.5** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Seja  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (5.25). Então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$H_{2n}^{(\alpha, M_0, M_2)}(x) := Q_{2n}(x) = L_n^{(\alpha-1/2, M_0/\Gamma(\alpha+1/2), 4M_2/\Gamma(\alpha+1/2))}(x^2) \quad (5.26)$$



e

$$H_{2n+1}^{(\alpha, M_1, M_3)}(x) := Q_{2n+1}(x) = x L_n^{(\alpha+1/2, M_1/\Gamma(\alpha+3/2), 36M_3/\Gamma(\alpha+3/2))}(x^2). \quad (5.27)$$

Para o caso  $\alpha = 0$ , temos os polinômios ortogonais do tipo Hermite

$$H_{2n}^{(M_0, M_2)}(x) := H_{2n}^{(0, M_0, M_2)}(x) = L_n^{(-1/2, M_0/\Gamma(1/2), 4M_2/\Gamma(1/2))}(x^2)$$

e

$$H_{2n+1}^{(M_1, M_3)}(x) := H_{2n+1}^{(0, M_1, M_3)}(x) = x L_n^{(1/2, M_1/\Gamma(3/2), 36M_3/\Gamma(3/2))}(x^2).$$

*Demonstração.* Sejam  $Q_{2n}(x) = P_n(x^2)$  e  $Q_{2n+1}(x) = xR_n(x^2)$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle Q_{2n}, Q_{2m} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x^2) P_m(x^2) |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + M_0 P_n(0) P_m(0) + 4M_2 P'_n(0) P'_m(0) \\ &= 2 \int_0^{\infty} P_n(x^2) P_m(x^2) x^{2\alpha} e^{-x^2} dx + M_0 P_n(0) P_m(0) + 4M_2 P'_n(0) P'_m(0). \end{aligned}$$

Fazendo  $x^2 = t$ , obtemos

$$\langle Q_{2n}, Q_{2m} \rangle = \int_0^{\infty} P_n(t) P_m(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + M_0 P_n(0) P_m(0) + 4M_2 P'_n(0) P'_m(0) = K_{2n} \delta_{n,m}.$$

Assim,

$$H_{2n}^{(\alpha, M_0, M_2)}(t) = Q_{2n}(t) = P_n(t^2) = L_n^{(\alpha-1/2, M_0/\Gamma(\alpha+1/2), 4M_2/\Gamma(\alpha+1/2))}(t^2),$$

com  $M_0 = \Gamma(\alpha + 1/2)M$  e  $M_2 = \Gamma(\alpha + 1/2)N/4$  em (5.16). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle Q_{2n+1}, Q_{2m+1} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} R_n(x^2) R_m(x^2) x^2 |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + M_1 R_n(0) R_m(0) + 36M_3 R'_n(0) R'_m(0) \\ &= 2 \int_0^{\infty} R_n(x^2) R_m(x^2) x^{2(\alpha+1)} e^{-x^2} dx + M_1 R_n(0) R_m(0) + 36M_3 R'_n(0) R'_m(0). \end{aligned}$$

Fazendo  $x^2 = t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle Q_{2n+1}, Q_{2m+1} \rangle &= \int_0^{\infty} R_n(t) R_m(t) t^{(\alpha+1/2)} e^{-t} dt + M_1 R_n(0) R_m(0) + 36M_3 R'_n(0) R'_m(0) \\ &= K_{2n+1} \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Assim,

$$H_{2n+1}^{(\alpha, M_1, M_3)}(t) = Q_{2n+1}(t) = t R_n(t^2) = t L_n^{(\alpha+1/2, M_1/\Gamma(\alpha+3/2), 36M_3/\Gamma(\alpha+3/2))}(t^2),$$

com  $M_1 = \Gamma(\alpha + 3/2)M$  e  $M_3 = \Gamma(\alpha + 3/2)N/36$  em (5.16).  $\square$

Denotemos por  $h_{2n,k}^{M_0,M_2}(\alpha)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ , e  $h_{2n+1,k}^{M_1,M_3}(\alpha)$ ,  $1 \leq k \leq 2n+1$ , respectivamente, os zeros dos polinômios do tipo Hermite generalizado,  $H_{2n}^{(\alpha,M_0,M_2)}(x)$  e  $H_{2n+1}^{(\alpha,M_1,M_3)}(x)$ , arrançados na seguinte forma:  $[h_{2n,n}^{M_0,M_2}(\alpha)]^2 < \dots < [h_{2n,1}^{M_0,M_2}(\alpha)]^2$  e  $[h_{2n+1,n}^{M_1,M_3}(\alpha)]^2 < \dots < [h_{2n+1,1}^{M_1,M_3}(\alpha)]^2$ .

Observe que, da propriedade de simetria desses polinômios, temos que  $h_{2n,k}^{M_0,M_2}(\alpha) = -h_{2n,2n-k+1}^{M_0,M_2}(\alpha)$  e  $h_{2n+1,k}^{M_1,M_3}(\alpha) = -h_{2n+1,2n+2-k}^{M_1,M_3}(\alpha)$ , para  $k = 1, \dots, n$ . A seguir, faremos uma análise do comportamento desses zeros: assintótica, entrelaçamento e monotonicidade.

Sejam  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$  e  $x_{n,k}(\alpha)$  os zeros de  $L_n^{(\alpha,M,N)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , respectivamente, todos arrançados em ordem decrescente. Então, de (5.26) e (5.27), temos que

$$\left[ h_{2n,k}^{M_0,M_2}(\alpha) \right]^2 = x_{n,k}^{M_0/\Gamma(\alpha+1/2), 4M_2/\Gamma(\alpha+1/2)}(\alpha - 1/2)$$

e

$$\left[ h_{2n+1,k}^{M_1,M_3}(\alpha) \right]^2 = x_{n,k}^{M_1/\Gamma(\alpha+3/2), 36M_3/\Gamma(\alpha+3/2)}(\alpha + 1/2).$$

Desde que, dependendo dos valores de  $M_2$  e  $M_3$ , os menores zeros dos polinômios do tipo Laguerre-Sobolev generalizado

$$x_{n,n}^{M_0/\Gamma(\alpha+1/2), 4M_2/\Gamma(\alpha+1/2)}(\alpha - 1/2) \text{ e } x_{n,n}^{M_1/\Gamma(\alpha+3/2), 36M_3/\Gamma(\alpha+3/2)}(\alpha + 1/2)$$

podem ser negativos, então os zeros  $h_{2n,n}^{M_0,M_2}(\alpha)$  e  $h_{2n+1,n}^{M_1,M_3}(\alpha)$  podem ser complexos, isto é, os polinômios  $H_{2n}^{(\alpha,M_0,M_2)}(x)$  e  $H_{2n+1}^{(\alpha,M_1,M_3)}(x)$  podem ter um par de zeros complexos localizados no eixo imaginário. Portanto, no máximo dois zeros complexos aparecem nessa situação.

Este é um exemplo interessante que mostra que esse tipo de produto interno pode gerar uma sequência de polinômios ortogonais com zeros complexos.

**Teorema 5.6** (F. Marcellán e F. R. Rafeali, 2010). *Seja  $\alpha > -1/2$ . Então,*

(i) *as desigualdades*

$$\left[ h_{2n,k+1}^{M_0,M_2}(\alpha) \right]^2 < x_{n,k+1}(\alpha - 1/2) < \left[ h_{2n,k}^{M_0,M_2}(\alpha) \right]^2 < x_{n,k}(\alpha - 1/2)$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e todo  $k$  com  $1 \leq k \leq n-1$ . Além disso, para todo  $n$  fixo, o zero  $h_{2n,n}^{M_0,M_2}(\alpha)$  satisfaz

$$\left[ h_{2n,n}^{M_0,M_2}(\alpha) \right]^2 > 0, \quad \text{para } M_2 < \widetilde{M}_2,$$

$$\left[ h_{2n,n}^{M_0,M_2}(\alpha) \right]^2 = 0, \quad \text{para } M_2 = \widetilde{M}_2,$$

$$\left[ h_{2n,n}^{M_0,M_2}(\alpha) \right]^2 < 0, \quad \text{para } M_2 > \widetilde{M}_2,$$

com

$$\widetilde{M}_2 = \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+3/2)}{4(\alpha+7/2)_{n-2}};$$

(ii) as desigualdades

$$\left[ h_{2n+1,k+1}^{M_1,M_3}(\alpha) \right]^2 < x_{n,k+1}(\alpha+1/2) < \left[ h_{2n+1,k}^{M_1,M_3}(\alpha) \right]^2 < x_{n,k}(\alpha+1/2)$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e todo  $k$  com  $1 \leq k \leq n-1$ . Além disso, para todo  $n$  fixo, o zero  $h_{2n+1,n}^{M_1,M_3}(\alpha)$  satisfaz

$$\left[ h_{2n+1,n}^{M_1,M_3}(\alpha) \right]^2 > 0, \quad \text{for } M_3 < \widetilde{M}_3,$$

$$\left[ h_{2n+1,n}^{M_1,M_3}(\alpha) \right]^2 = 0, \quad \text{for } M_3 = \widetilde{M}_3,$$

$$\left[ h_{2n+1,n}^{M_1,M_3}(\alpha) \right]^2 < 0, \quad \text{for } M_3 > \widetilde{M}_3,$$

com

$$\widetilde{M}_3 = \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+5/2)}{36(\alpha+9/2)_{n-2}}.$$

*Demonstração.* Este resultado é consequência dos Teoremas 5.5 e 5.4. □

O próximo teorema é baseado em resultados da Seção 5.3.

**Teorema 5.7** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Sejam  $\alpha > -1/2$  e  $\zeta_{n,k}(\alpha)$  os zeros do polinômio  $F_{n,\alpha}(x)$  definido em (5.83). Então,*

(i) as desigualdades, para  $M_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \zeta_{n,n}(\alpha-1/2) &< \left[ h_{2n,n}^{0,M_2}(\alpha) \right]^2 < x_{n,n}(\alpha-1/2) < \cdots < \zeta_{n,1}(\alpha-1/2) \\ &< \left[ h_{2n,1}^{0,M_2}(\alpha) \right]^2 < x_{n,1}(\alpha-1/2) \end{aligned}$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Além disso, os zeros  $\left[h_{2n,k}^{0,M_2}(\alpha)\right]^2$  são funções decrescentes de  $M_2$ ,  $\left[h_{2n,k}^{0,M_2}(\alpha)\right]^2 \rightarrow \zeta_{n,k}(\alpha - 1/2)$  quando  $M_2 \rightarrow \infty$ , e

$$\lim_{M_2 \rightarrow \infty} M_2 \left\{ \left[h_{2n,k}^{0,M_2}(\alpha)\right]^2 - \zeta_{n,k}(\alpha - 1/2) \right\} = g_{n,k}(\alpha - 1/2), \quad k = 1, \dots, n;$$

(ii) as desigualdades, para  $M_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \zeta_{n,n}(\alpha + 1/2) &< \left[h_{2n+1,n}^{0,M_3}(\alpha)\right]^2 < x_{n,n}(\alpha + 1/2) < \dots < \zeta_{n,1}(\alpha + 1/2) \\ &< \left[h_{2n+1,1}^{0,M_3}(\alpha)\right]^2 < x_{n,1}(\alpha + 1/2) \end{aligned}$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Além disso, os zeros  $\left[h_{2n+1,k}^{0,M_3}(\alpha)\right]^2$  são funções decrescentes de  $M_3$ ,  $\left[h_{2n+1,k}^{0,M_3}(\alpha)\right]^2 \rightarrow \zeta_{n,k}(\alpha + 1/2)$  quando  $M_3 \rightarrow \infty$ , e

$$\lim_{M_3 \rightarrow \infty} M_3 \left\{ \left[h_{2n+1,k}^{0,M_3}(\alpha)\right]^2 - \zeta_{n,k}(\alpha + 1/2) \right\} = g_{n,k}(\alpha + 1/2), \quad k = 1, \dots, n.$$

A função  $g_{n,k}(\alpha)$  acima foi definida em (5.88).

*Demonstração.* Este resultado é consequência dos Teoremas 5.5, 5.23 e 5.24.  $\square$

## 5.2 Zeros de polinômios ortogonais gerados por uma perturbação

Nesta seção, consideraremos os polinômios ortogonais gerados por uma perturbação na medida dos polinômios ortogonais clássicos. Mais especificamente, sejam as medidas clássicas  $d\mu_{\alpha,\beta} = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ ,  $\alpha, \beta > -1$ ,  $d\mu_\alpha = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $\alpha > -1$ , e  $d\mu = e^{-x^2} dx$ , que geram os polinômios ortogonais de Jacobi, Laguerre e Hermite, respectivamente, e consideremos as seguintes perturbações nessas medidas:

$$d\tilde{\mu}_{\alpha,\beta} = d\mu_{\alpha,\beta} + M\delta_a, \tag{5.28}$$

$$d\tilde{\mu}_\alpha = d\mu_\alpha + M\delta_a \tag{5.29}$$

e

$$d\tilde{\mu} = d\mu + M\delta_a, \quad (5.30)$$

com  $\delta_a$  sendo a função delta de Dirac no ponto  $x = a$  e  $M > 0$ . Os novos polinômios ortogonais que surgem das medidas (5.28), (5.29) e (5.30) são chamados de tipo Jacobi, tipo Laguerre e tipo Hermite. O estudo dos zeros dessas três novas famílias de polinômios ortogonais tem sido motivo de pesquisa de vários matemáticos nos últimos anos (veja [2], [20], [21], [27], [29], [37], [39]). Um dos interesses dos especialistas nesta área é estudar o comportamento dos zeros desses polinômios com relação à massa  $M$ . Algumas das contribuições desta tese tratam exatamente deste assunto. Fornecemos algumas informações sobre a influência da massa  $M$  nos novos zeros, tais como, monotonicidade, assintoticidade e velocidade de convergência, além de propriedades de entrelaçamento desses zeros com os zeros dos polinômios ortogonais clássicos.

### 5.2.1 Polinômios ortogonais do tipo Jacobi

Consideremos os polinômios do tipo Jacobi (ou Jacobi-Koornwinder),  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x)\}_{n \geq 0}$ , que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1), \quad (5.31)$$

com  $\alpha, \beta > -1$  e  $M > 0$ . De forma análoga, podemos considerar os polinômios do tipo Jacobi,  $\{P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Np(-1)q(-1), \quad (5.32)$$

com  $\alpha, \beta > -1$  e  $N > 0$ . Tais polinômios foram estudados primeiramente por T. H. Koornwinder [39], em 1984. Lá, ele adicionou, simultaneamente, duas funções delta de Dirac nos pontos  $x = -1$  e  $x = 1$ , isto é,

$$d\tilde{\mu}_{\alpha, \beta, M, N} = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} d\mu_{\alpha, \beta} + N\delta_{-1} + M\delta_1. \quad (5.33)$$

A constante que multiplica a medida clássica tem apenas o papel de normalização, não desempenha nenhuma função especial. Denotaremos por  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  os polinômios que

são ortogonais com relação à medida (5.33). Uma representação desses polinômios em termos dos polinômios clássicos é a seguinte:

**Teorema 5.8** (T. H. Koornwinder, 1984). *Os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = \left[ \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right]^2 \times \left\{ A_n B_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{B_n N(1 - x) - A_n M(1 + x)}{\alpha + \beta + 1} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right\}, \quad (5.34)$$

com

$$A_n = A_n^N(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)N}{(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)},$$

$$B_n = B_n^M(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)M}{(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)}.$$

Como consequência de (5.34) ou (5.6), obtemos, para os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta, M, 0)}(x)$ , a seguinte fórmula de conexão:

**Corolário 5.1.** *Os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x)$  podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - A_1 \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (5.35)$$

com

$$A_0 = A_0^M(n; \alpha, \beta) = 1 + AM,$$

$$A_1 = A_1^M(n; \alpha, \beta) = \frac{\alpha + 1}{n(n + \alpha + \beta + 1)} AM$$

e

$$A = A(n; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n)}.$$

Forneceremos, na sequência, uma outra fórmula de conexão para esses polinômios.

**Teorema 5.9** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x)$  podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + MG_{n, \alpha, \beta}(x), \quad (5.36)$$

com

$$G_{n, \alpha, \beta}(x) := \frac{(n + \beta)A}{2n}(x - 1)P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x). \quad (5.37)$$

*Demonstração.* Observe que, de (5.35), temos

$$G_{n,\alpha,\beta}(x) = AP_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{(\alpha+1)A}{n(n+\alpha+\beta+1)}(1+x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (5.38)$$

De fato, para provar que (5.37) e (5.38) coincidem, basta usar (2.13) e comparar termo a termo cada potência de  $x$ .  $\square$

Sejam  $x_{n,k}^M(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , os zeros de  $P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x)$  e  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , respectivamente, arranjados em ordem crescente, isto é,  $x_{n,1}^M(\alpha, \beta) < \dots < x_{n,n}^M(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,1}(\alpha, \beta) < \dots < x_{n,n}(\alpha, \beta)$ . A monotonicidade e a assintoticidade dos zeros do polinômio de Jacobi clássico,  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , foram investigadas no Capítulo 4 (ver [17] e, também, todas as referências lá citadas). Agora, um problema interessante é investigar o comportamento dos zeros dos polinômios do tipo Jacobi quando a massa  $M$  varia. Alguns artigos que tratam desse assunto são [2], [21] e [29]. Provamos que eles são funções monótonas considerando-os como funções da massa  $M$ , assim como a convergência deles quando  $M$  tende ao infinito, com velocidade de ordem  $1/M$ , aos zeros de certos polinômios ortogonais clássicos.

**Teorema 5.10** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$\begin{aligned} x_{n,1}(\alpha, \beta) &< x_{n,1}^M(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta) < \dots < x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < x_{n,n-1}^M(\alpha, \beta) \\ &< x_{n-1,n-1}(\alpha+2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^M(\alpha, \beta) < 1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

são válidas para todo  $M > 0$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha, \beta > -1$ . Além disso, cada zero  $x_{n,k}^M(\alpha, \beta)$  é uma função crescente de  $M$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^M(\alpha, \beta) = 1, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^M(\alpha, \beta) = x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta), \quad (5.40)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M[1 - x_{n,n}^M(\alpha, \beta)] &= g_n(\alpha, \beta), \\ \lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta) - x_{n,k}^M(\alpha, \beta)] &= \frac{[1 + x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)] g_n(\alpha, \beta)}{2(\alpha+2)}, \end{aligned}$$

com

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\beta)(n+\alpha+1)A}. \quad (5.41)$$

*Demonstração.* Observe que os coeficientes de  $x^n$  em  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ,  $P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x)$  e  $G_{n,\alpha,\beta}(x)$  são dados por

$$2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} A_0 \quad \text{e} \quad \frac{2^{-n}(n+\beta)A}{n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n-1},$$

respectivamente. Desde que todos eles são positivos, então, do entrelaçamento (5.10), isto é, de

$$x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}^M(\alpha, \beta) < \cdots < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^M(\alpha, \beta)$$

e da fórmula de conexão (5.36), temos

$$\text{sign} \left( P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) = \text{sign} \left( G_{n,\alpha,\beta}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) = (-1)^{n-k+1}$$

e

$$\text{sign} \left( P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n,k}^M(\alpha, \beta)) \right) = -\text{sign} \left( G_{n,\alpha,\beta}(x_{n,k}^M(\alpha, \beta)) \right) = (-1)^{n-k},$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Isso implica na propriedade de entrelaçamento (5.39).

Agora, do entrelaçamento (5.39) e da fórmula de conexão (5.36), usamos o Teorema 3.9 para concluir que os zeros de  $P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x)$  convergem aos zeros de  $G_{n,\alpha,\beta}(x)$ , isto é,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^M(\alpha, \beta) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^M(\alpha, \beta) = x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta). \quad (5.42)$$

Além disso, segue, também, que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[1 - x_{n,n}^M(\alpha, \beta)] = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{G'_{n,\alpha,\beta}(1)}$$

e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta) - x_{n,k}^M(\alpha, \beta)] = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta))}{G'_{n,\alpha,\beta}(x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta))}.$$

Usando (2.14), (2.17), (2.19) e (5.38), obtemos, após alguns cálculos, que

$$\frac{G'_{n,\alpha,\beta}(1)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)} = \frac{1}{g_n(\alpha, \beta)} \quad \text{e} \quad \frac{G'_{n,\alpha,\beta}(x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta))}{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta))} = \frac{2(\alpha + 2)}{[1 + x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta)]g_n(\alpha, \beta)},$$

com  $g_n(\alpha, \beta)$  dado por (5.41). □



Experimentos numéricos mostram que as quantidades  $M[1 - x_{n,n}^M(\alpha, \beta)]$  e  $M[x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta) - x_{n,k}^M(\alpha, \beta)]$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , são funções crescentes de  $M$ .

Para ilustrar os resultados do Teorema 5.10, fornecemos uma tabela (ver Tabela 5.3) que mostra os zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M)}(x)$ , com  $\alpha = 0$  e  $\beta = 2$ , para vários valores de  $M$ . Observe que o maior zero converge para 1 e os outros dois zeros convergem aos

Tabela 5.3: Zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M)}(x)$  para alguns valores de  $M$ .

$M$	$x_{3,1}^M(0, 2)$	$x_{3,2}^M(0, 2)$	$x_{3,3}^M(0, 2)$
0	-0.410004	0.305992	0.854012
1	-0.38243	0.368016	0.972748
5	-0.378969	0.375736	0.993617
10	-0.378475	0.376834	0.996739
50	-0.378068	0.377736	0.999336

zeros do polinômio de Jacobi  $P_2^{(2,2)}(x)$ , isto é, eles convergem para  $x_{2,1}(2, 2) = -1/\sqrt{7}$  e  $x_{2,2}(2, 2) = 1/\sqrt{7}$ . Note também que todos os zeros são funções monótonas com relação a  $M$ . Veja também a Figura 5.3.

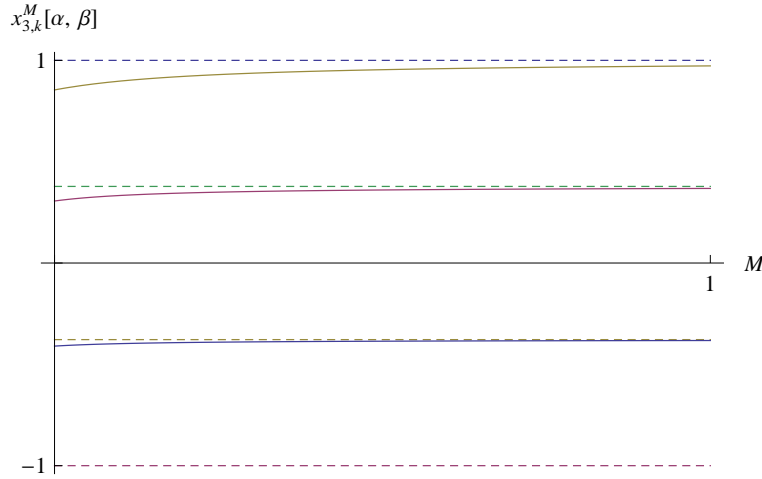


Figura 5.3: Gráfico dos zeros de  $P_3^{(0,2,M)}(x)$  como função de  $M$ .

Usando a propriedade de simetria (2.15) dos polinômios de Jacobi, obtemos facilmente resultados análogos aos anteriores sobre os zeros  $x_{n,k}^N(\alpha, \beta)$  dos polinômios

$P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)$ , gerados pelo produto interno (5.32).

**Corolário 5.2.** *Os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)$  podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + N \frac{(n + \alpha)A(n; \beta, \alpha)}{2n}(x + 1)P_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x). \quad (5.43)$$

**Corolário 5.3.** *As desigualdades*

$$\begin{aligned} -1 < x_{n,1}^N(\alpha, \beta) < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,2}^N(\alpha, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < \dots \\ < x_{n-1,n-1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,n}^N(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

são válidas para todo  $N > 0$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha, \beta > -1$ . Além disso, cada  $x_{n,k}^N(\alpha, \beta)$  é uma função decrescente de  $N$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,1}^N(\alpha, \beta) = -1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,k+1}^N(\alpha, \beta) = x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2), \quad (5.44)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N[x_{n,1}^N(\alpha, \beta) + 1] &= h_n(\alpha, \beta), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N[x_{n,k+1}^N(\alpha, \beta) - x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] &= \frac{[1 - x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] h_n(\alpha, \beta)}{2(\beta + 2)}, \end{aligned}$$

com

$$h_n(\alpha, \beta) = \frac{2(\beta + 1)(\beta + 2)}{(n + \alpha)(n + \beta + 1)A(n; \beta, \alpha)}.$$

Consideremos, agora, o comportamento dos zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$ , caso esse estudado, como já dissemos, por T. H. Koornwinder. Denotemos seus zeros por  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , com  $x_{n,1}^{M,N}(\alpha, \beta) < \dots < x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta)$ . Uma interessante interpretação eletrostática desses zeros foi apresentada em [29]. Nossa contribuição com relação ao comportamento desses zeros é que mostramos que eles são funções monótonas com relação às massas  $M$  e  $N$  [15].

**Teorema 5.11** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$\begin{aligned} -1 < x_{n,1}^{M,N}(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha + 1, \beta + 1) < x_{n,2}^{M,N}(\alpha, \beta) < \dots \\ < x_{n-1,n-1}(\alpha + 1, \beta + 1) < x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) < 1, \end{aligned} \quad (5.45)$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $M, N > 0$  e  $\alpha + \beta + 1 > 0$ . Além disso, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $M$  e decrescentes de  $N$ .

*Demonstração.* Usando (2.19), podemos reescrever (5.34) como

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = \left[ \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right]^2 \left\{ \frac{-A_n B_n}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (1 - x^2) \left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]'' + r_n^{(\alpha, \beta)}(M, N; x) \left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]' \right\},$$

com  $r_n = r_n^{(\alpha, \beta)}(M, N; x) = ax - b$ ,

$$a = \frac{-n(n + \alpha + \beta + 1)NB_n}{n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)} + \frac{A_n[-n(n + \alpha + \beta + 1)M + (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 2)B_n]}{n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)}$$

e

$$b = \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)MA_n}{n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)} - \frac{[n(n + \alpha + \beta + 1)N + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1)A_n]B_n}{n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)}.$$

Observe que, para  $n \geq 2$  e  $\alpha + \beta + 1 > 0$ ,

$$n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)a = \frac{c}{d} > 0,$$

com

$$c = \Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1) \times \left\{ \Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 3) + n \left[ \Gamma(\beta + 2)^2\Gamma(n + \alpha + 1)^2 + N\Gamma(\alpha + 2)^2\Gamma(n + \beta + 1)^2 \right] \Gamma(n + \alpha + \beta + 2) \right\}$$

e

$$d = \Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)^2.$$

Desde que

$$\begin{aligned} & n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(a - b) \\ &= A_n \frac{2\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(a + b) \\ &= B_n \frac{2\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} > 0, \end{aligned}$$

o zero  $\xi = b/a$  de  $r_n$  pertence a  $(-1, 1)$ . Agora, note que os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  são os pontos de intersecção da reta  $r_n^{(\alpha, \beta)}(M, N; x)$  com a função racional

$$\begin{aligned} & \frac{A_n B_n}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (1 - x^2) \frac{\left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]''}{\left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]'} \\ &= \frac{A_n B_n}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (1 - x^2) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_{n-1,k}(\alpha + 1, \beta + 1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -1 &< x_{n,1}^{M,N}(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha + 1, \beta + 1) < x_{n,2}^{M,N}(\alpha, \beta) < \dots \\ &< x_{n-1,n-1}(\alpha + 1, \beta + 1) < x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) < 1. \end{aligned}$$

Além disso, para  $\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{r(M, N; x)}{B_n^M(n; \alpha, \beta)} - \frac{r(M + \varepsilon, N; x)}{B_n^{M+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)} = (1 + x)c_n(\beta, \alpha, N, M)$$

e

$$\frac{r(M, N; x)}{A_n^N(n; \alpha, \beta)} - \frac{r(M, N + \varepsilon; x)}{A_n^{N+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)} = (-1 + x)c_n(\alpha, \beta, M, N),$$

com

$$\begin{aligned} c_n(\alpha, \beta, M, N) &= \frac{\varepsilon(\beta + 1)^2 \delta_1(\alpha, \beta)[(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)\delta_1(\alpha, \beta) + nM\delta_2(\alpha, \beta)]}{(\alpha + 1)[(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)\delta_1(\beta, \alpha) + nN\delta_2(\beta, \alpha)]} \\ &\quad \times \frac{1}{[(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)\delta_1(\beta, \alpha) + n(N + \varepsilon)\delta_2(\beta, \alpha)]} > 0, \end{aligned}$$

para  $n \geq 2$ ,  $\alpha + \beta + 1 > 0$  e

$$\begin{aligned} \delta_1(\alpha, \beta) &= \Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1), \\ \delta_2(\alpha, \beta) &= \Gamma(\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2). \end{aligned}$$

Portanto, a monotonicidade dos zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  com relação às massas  $M$  e  $N$  está provada.  $\square$

Para exemplificar a monotonicidade, observe os gráficos das funções racionais

$$S_0(n; x) = \frac{A_n(1-x^2)}{n(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_{n-1,k}(\alpha+1, \beta+1)}$$

e

$$S_1(n; x) = \frac{B_n(1-x^2)}{n(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_{n-1,k}(\alpha+1, \beta+1)}$$

junto com os gráficos das retas

$$R_0^\varepsilon(n; x) = \frac{r_n^{(\alpha, \beta)}(M + \varepsilon, N; x)}{B_n^{M+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)} \quad \text{e} \quad R_1^\varepsilon(n; x) = \frac{r_n^{(\alpha, \beta)}(M, N + \varepsilon; x)}{A_n^{N+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)}$$

para vários valores de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$  (ver Figuras 5.4 e 5.5).

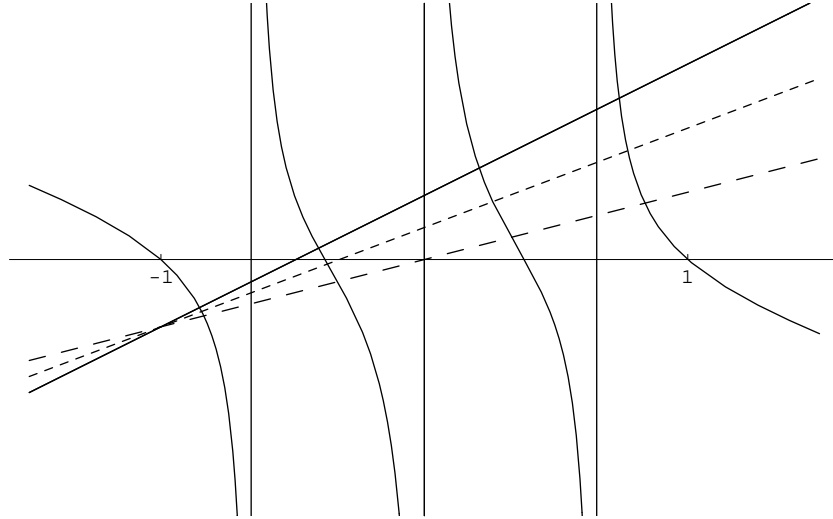


Figura 5.4: Gráficos de  $S_0(4; x)$  e  $R_0^\varepsilon(4; x)$ , para alguns valores de  $\varepsilon$ .

Abaixo, fornecemos duas tabelas para ilustrar numericamente a monotonicidade dos zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  como funções de  $M$  e  $N$ . A Tabela 5.4 mostra os zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  quando  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $N = 5$  para alguns valores de  $M$ . Fica claro que os zeros são funções crescentes de  $M$  e que o maior zero converge muito rápido a 1.

A Tabela 5.5 mostra os zeros  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  quando  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $M = 4$  para alguns valores de  $N$ . Agora, note que os zeros são funções decrescentes de  $N$  e que o menor zero converge rapidamente a  $-1$ .

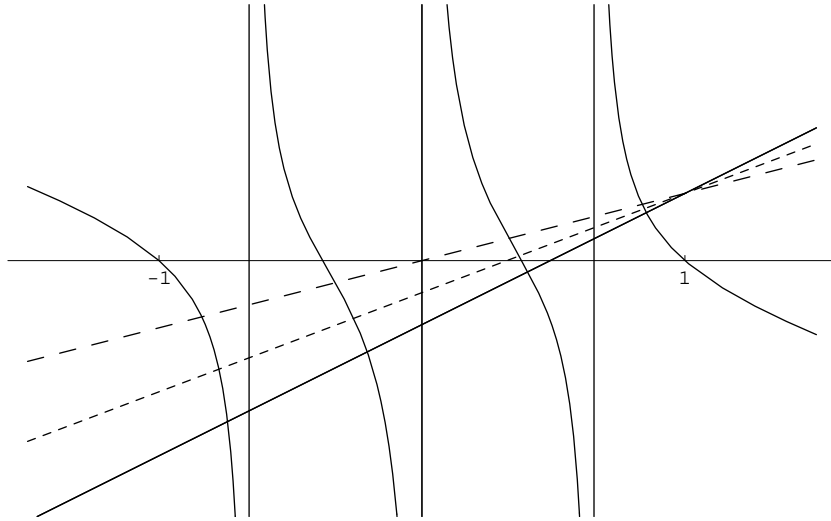


Figura 5.5: Gráficos de  $S_1(4; x)$  e  $R_1^\varepsilon(4; x)$ , para alguns valores de  $\varepsilon$ .

Tabela 5.4: Zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  para alguns valores de  $M$ .

$M$	$x_{3,1}^{(M,5)}(1, 2)$	$x_{3,2}^{(M,5)}(1, 2)$	$x_{3,3}^{(M,5)}(1, 2)$
0	-0.997724	0.000285	0.666762
1/4	-0.996843	0.0898728	0.899104
1/2	-0.996733	0.0995849	0.940857
3/4	-0.99669	0.103278	0.958181
1	-0.996667	0.105223	0.967658
5	-0.996608	0.110183	0.99301

Tabela 5.5: Zeros de  $P_3^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)$  para alguns valores de  $N$ .

$N$	$x_{3,1}^{(4,N)}(1, 2)$	$x_{3,2}^{(4,N)}(1, 2)$	$x_{3,3}^{(4,N)}(1, 2)$
0	-0.462982	0.239083	0.99439
1/4	-0.93918	0.116715	0.991499
1/2	-0.967854	0.113191	0.991401
3/4	-0.978155	0.111975	0.991366
1	-0.983456	0.111359	0.991349
5	-0.996612	0.10986	0.991306

Seja

$$D(M) = D(n, \alpha, \beta, M) = \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)M}{n!(n-1)!(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)^2}$$

e definamos os polinômios

$$U(x) := (x-1) \left\{ \frac{(n+\beta)A(n; \alpha, \beta)}{2n} P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) + D(N)(1+x) [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]'' \right\}$$

e

$$V(x) := (x+1) \left\{ \frac{(n+\alpha)A(n; \beta, \alpha)}{2n} P_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x) - D(M)(1-x) [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]'' \right\}.$$

Mostraremos, no próximo resultado, o comportamento assintótico de  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  quando um dos parâmetros  $M$  ou  $N$  convergem ao infinito.

**Teorema 5.12** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Para cada  $N > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  convergem aos zeros de  $U(x)$  quando  $M \rightarrow \infty$  e, para cada  $M > 0$ , os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  convergem aos zeros de  $V(x)$  quando  $N \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* De (5.36) e (5.43),

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, 0)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + M \frac{(n+\beta)A(n; \alpha, \beta)}{2n} (x-1) P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$$

e

$$P_n^{(\alpha, \beta, 0, N)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + N \frac{(n+\alpha)A(n; \beta, \alpha)}{2n} (1+x) P_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x).$$

Assim, podemos reescrever (5.34) como

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta, M, 0)}(x) + P_n^{(\alpha, \beta, 0, N)}(x) + \hat{A}_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \hat{B}_n [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]',$$

com

$$\hat{A}_n = -1 + \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)^2 M N}{(\alpha + 1)(\beta + 1)\Gamma(n)^2\Gamma(\alpha + \beta + 2)^2}$$

e

$$\hat{B}_n = \left( \frac{1-x}{\alpha+1} - \frac{1+x}{\beta+1} \right) \frac{n(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)^2 M N}{\Gamma(n+1)^2\Gamma(\alpha+\beta+2)^2}.$$

Daí,

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)}{M} \rightarrow U(x) \text{ quando } M \rightarrow \infty \quad (5.46)$$

e

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)}{N} \rightarrow V(x) \text{ quando } N \rightarrow \infty. \quad (5.47)$$

Portando, para todo  $N > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  convergem aos zeros da função do lado direito de (5.46) quando  $M \rightarrow \infty$  e, para todo  $M > 0$  fixo, os zeros  $x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta)$  convergem aos zeros da função do lado direito de (5.47) quando  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Corolário 5.4** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Para todo  $n \geq 2$ ,*

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} x_{n,1}^{M,N}(\alpha, \beta) = -1 \quad e \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} x_{n,n}^{M,N}(\alpha, \beta) = 1.$$

Além disso, para todo  $k = 2, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} x_{n,k}^{M,N}(\alpha, \beta) = x_{n-2,k-1}(\alpha + 2, \beta + 2).$$

*Demonstração.* Dividindo (5.46) por  $N$  ou dividindo (5.47) por  $M$ , temos

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x)}{MN} \rightarrow \frac{-n\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)\Gamma(n + 1)^2\Gamma(\alpha + \beta + 2)^2}(1 - x^2) \left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]''$$

quando  $M, N \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 5.2.2 Polinômios ortogonais do tipo Laguerre

Consideremos os polinômios do tipo Laguerre (Laguerre-Koornwinder),  $\{L_n^{(\alpha, M)}(x)\}_{n \geq 0}$ , ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0), \quad (5.48)$$

com  $\alpha > -1$  e  $M > 0$ . Esses polinômios também foram obtidos por T. H. Koornwinder [39], em 1984, como um caso limite dos polinômios do tipo Jacobi  $\{P_n^{(\alpha, \beta, M)}(x)\}_{n \geq 0}$ , ortogonais com relação a (5.31), isto é,

$$L_n^{(\alpha, M)}(x) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta, M)}(1 - 2\beta^{-1}x).$$

Apesar de T. H. Koornwinder ter obtido os polinômios do tipo Laguerre, ele não os descreveu com maiores detalhes. R. Koekoek [37], em 1988, publicou um trabalho no qual ele descreve alguns resultados, dentre eles, a fórmula de conexão a seguir.



**Teorema 5.13** (R. Koekoek, 1988). *Os polinômios  $L_n^{(\alpha, M)}(x)$  podem ser representados por*

$$L_n^{(\alpha, M)}(x) = A_0 L_n^{(\alpha)}(x) + A_1 \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x), \quad (5.49)$$

com

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0^M(n; \alpha) = 1 + M \binom{n + \alpha}{n - 1}, \\ A_1 &= A_1^M(n; \alpha) = M \binom{n + \alpha}{n}. \end{aligned}$$

Da forma como apresentada acima, a fórmula de conexão não é muito útil para nosso propósito. Por esse motivo, reescrevemos da seguinte forma:

**Teorema 5.14** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Os polinômios  $L_n^{(\alpha, M)}(x)$  podem ser representados por*

$$L_n^{(\alpha, M)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + M G_{n, \alpha}(x), \quad (5.50)$$

com

$$G_{n, \alpha}(x) := -\frac{1}{n} \binom{n + \alpha}{n - 1} x L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x). \quad (5.51)$$

*Demonstração.* Observe que, de (5.49), temos

$$G_{n, \alpha}(x) = \binom{n + \alpha}{n - 1} L_n^{(\alpha)}(x) + \binom{n + \alpha}{n} \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x). \quad (5.52)$$

Para provar que (5.51) e (5.52) coincidem, basta usar (2.23) e comparar termo a termo cada potência de  $x$ .  $\square$

Sejam  $x_{n, k}^M(\alpha)$  e  $x_{n, k}(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , os zeros de  $L_n^{(\alpha, M)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , respectivamente, arranjados em ordem decrescente, isto é,  $x_{n, n}^M(\alpha) < \dots < x_{n, 1}^M(\alpha)$  e  $x_{n, n}(\alpha) < \dots < x_{n, 1}(\alpha)$ . A monotonicidade e a assintótica dos zeros do polinômio de Laguerre clássico,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , foram investigadas no Capítulo 4 (ver [18] e, também, todas as referências lá citadas). Agora, um problema interessante é pesquisar o comportamento dos zeros dos polinômios do tipo Laguerre quando a massa  $M$  varia. Alguns trabalhos recentes sobre este assunto são [2], [22] e [37]. O próximo resultado mostra a monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência dos zeros  $x_{n, k}^M(\alpha)$  com relação a  $M$ , além do entrelaçamento desses zeros com os zeros dos polinômios de Laguerre clássicos [14].

**Teorema 5.15** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$0 < x_{n,n}^M(\alpha) < x_{n,n}(\alpha) < x_{n,n-1}(\alpha + 2) < x_{n,n-1}^M(\alpha) < x_{n-1,n-1}(\alpha) < \cdots < x_{n-1,1}(\alpha + 2) < x_{n,1}^M(\alpha) < x_{n,1}(\alpha) \quad (5.53)$$

são válidas para todo  $M > 0$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1$ . Além disso, cada zero  $x_{n,k}^M(\alpha)$  é uma função decrescente de  $M$  e, para cada  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^M(\alpha) = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^M(\alpha) = x_{n-1,k}(\alpha + 2), \quad (5.54)$$

e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M x_{n,n}^M(\alpha) = (\alpha + 2)g_n(\alpha), \quad (5.55)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n,k}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha + 2)] = g_n(\alpha),$$

com

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 2) \binom{n+\alpha+1}{n-1}}. \quad (5.56)$$

*Demonstração.* Observe que os coeficientes de  $x^n$  em  $L_n^{(\alpha)}(x)$ ,  $L_n^{(\alpha,M)}(x)$  e  $G_{n,\alpha}(x)$  são, respectivamente,

$$\frac{(-1)^n}{n!}, \quad \frac{(-1)^n}{n!} A_0 \quad \text{e} \quad \frac{(-1)^n}{n!} \binom{n+\alpha}{n-1}.$$

Desde que, dependendo da paridade, todos são positivos ou negativos, então, do entrelaçamento (5.18), isto é, de

$$x_{n,n}^M(\alpha) < x_{n,n}(\alpha) < \cdots < x_{n,1}^M(\alpha) < x_{n,1}(\alpha)$$

e da fórmula de conexão (5.50), obtemos

$$\text{sign} \left( L_n^{(\alpha,M)}(x_{n,k}(\alpha)) \right) = \text{sign} \left( G_{n,\alpha}(x_{n,k}(\alpha)) \right) = (-1)^{n-k+1}$$

e

$$\text{sign} \left( L_n^{(\alpha)}(x_{n,k}^M(\alpha)) \right) = -\text{sign} \left( G_{n,\alpha}(x_{n,k}^M(\alpha)) \right) = (-1)^{n-k},$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Isso implica na propriedade de entrelaçamento (5.53).

Agora, do entrelaçamento (5.53) e da fórmula de conexão (5.50), usamos o Teorema 3.9 para concluir que os zeros de  $L_n^{(\alpha,M)}(x)$  convergem aos zeros de  $G_{n,\alpha}(x)$ , isto é,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^M(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^M(\alpha) = x_{n-1,k}(\alpha + 2). \quad (5.57)$$

Além disso, segue, também, que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n,k}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha + 2)] = \frac{L_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))}{G'_{n,\alpha}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))}$$

e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n,n}^M(\alpha)] = \frac{L_n^{(\alpha)}(0)}{G'_{n,\alpha}(0)}.$$

Usando (2.24), (2.26), (2.28) e (5.52) obtemos, depois de alguns cálculos,

$$\frac{G'_{n,\alpha}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))}{L_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))} = \frac{1}{g_n(\alpha)} \quad \text{e} \quad \frac{G'_{n,\alpha}(0)}{L_n^{(\alpha)}(0)} = \frac{1}{(\alpha + 2)g_n(\alpha)},$$

com  $g_n(\alpha)$  dado por (5.56). □

É um pouco surpreendente que o limite  $g_n(\alpha)$  em (5.55) não depende de  $k$ .

**Teorema 5.16** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafeali, 2010). *Para cada  $n \geq 2$  e todo  $\alpha > -1$ , as quantidades*

$$M[x_{n,1}^M(\alpha) - x_{n-1,1}(\alpha + 2)]$$

*são funções crescentes de  $M$ , para  $M > 0$ .*

*Demonstração.* Desde que

$$x_{n-1,1}(\alpha + 2) < x_{n,1}^M(\alpha) < x_{n,1}(\alpha),$$

então, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número real  $\eta$  em  $(x_{n-1,1}(\alpha + 2), x_{n,1}^M(\alpha))$  tal que

$$[x_{n,1}^M(\alpha) - x_{n-1,1}(\alpha + 2)] = \frac{-L_n^{(\alpha)}(x_{n-1,1}(\alpha + 2))}{\left[ L_n^{(\alpha,M)}(x) \right]' \Big|_{x=\eta}}. \quad (5.58)$$

Por outro lado, derivando (5.50) temos

$$[L_n^{(\alpha)}(x)]' \Big|_{x=x_{n,k}^M(\alpha)} \frac{dx_{n,k}^M(\alpha)}{dM} - G_{n,\alpha}(x_{n,k}^M(\alpha)) - MG'_{n,\alpha}(x_{n,k}^M(\alpha)) \frac{dx_{n,k}^M(\alpha)}{dM} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dx_{n,k}^M(\alpha)}{dM} = \frac{L_n^{(\alpha)}(x_{n,k}^M(\alpha))}{M[L_n^{(\alpha,M)}(x)]' \Big|_{x=x_{n,k}^M(\alpha)}}. \quad (5.59)$$

De (5.58) e (5.59), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} \{M[x_{n,1}^M(\alpha) - x_{n-1,1}(\alpha + 2)]\} &= M \frac{dx_{n,1}^M(\alpha)}{dM} + [x_{n,1}^M(\alpha) - x_{n-1,1}(\alpha + 2)] \\ &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x_{n,1}^M(\alpha))}{\left[L_n^{(\alpha,M)}(x)\right]' \Big|_{x=x_{n,1}^M(\alpha)}} - \frac{L_n^{(\alpha)}(x_{n-1,1}(\alpha + 2))}{\left[L_n^{(\alpha,M)}(x)\right]' \Big|_{x=\eta}}. \end{aligned}$$

Desde que, dependendo da paridade de  $n$ ,  $L_n^{(\alpha,M)}(x)$  e  $L_n^{(\alpha)}(x)$  são ambas funções crescentes e convexas ou funções decrescentes e côncavas em  $(x_{n-1,1}(\alpha + 2), +\infty)$ , concluímos que

$$\left|L_n^{(\alpha)}(x_{n,1}^M(\alpha))\right| < \left|L_n^{(\alpha)}(x_{n-1,1}(\alpha + 2))\right|$$

e

$$\left|[L_n^{(\alpha,M)}(x)]' \Big|_{x=x_{n,1}^M(\alpha)}\right| > \left|[L_n^{(\alpha,M)}(x)]' \Big|_{x=\eta}\right|,$$

demonstrando, assim, o Teorema 5.16.  $\square$

Simulações numéricas indicam que as quantidades  $Mx_{n,n}^M(\alpha)$  e  $M[x_{n,k}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha + 2)]$  são também funções crescentes de  $M$ ,  $M > 0$ , para todo  $k$  com  $1 \leq k \leq n - 1$ .

Tendo em mente o limite (5.55) no Teorema 5.15 e a monotonicidade dada no Teorema 5.16, obtemos:

**Corolário 5.5** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafeali, 2010). *A desigualdade*

$$x_{n,1}^M(\alpha) \leq x_{n-1,1}(\alpha + 2) + g_n(\alpha)/M$$

*é válida para todo  $M > 0$ ,  $\alpha > -1$  e  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 2$ .*

### 5.2.3 Polinômios ortogonais do tipo Hermite

Consideremos os polinômios do tipo Hermite (generalizado),  $Q_n(x) = H_n^{(\alpha,M)}(x)$ , que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)|x|^{2\alpha}e^{-x^2}dx + Mp(0)q(0), \quad (5.60)$$

com  $\alpha > -1/2$  e  $M > 0$ . Ademais, fazendo  $M_0 = M$  e  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$  em (5.25), obtemos (5.60). Assim, é imediato que:

**Teorema 5.17** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Seja  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (5.60). Então, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$H_{2n}^{(\alpha, M)}(x) := Q_{2n}(x) = L_n^{(\alpha-1/2, M/\Gamma(\alpha+1/2))}(x^2) \quad (5.61)$$

e

$$H_{2n+1}^{(\alpha, M)}(x) = H_{2n+1}^{(\alpha, 0)}(x) := Q_{2n+1}(x) = x L_n^{(\alpha+1/2)}(x^2). \quad (5.62)$$

Para o caso  $\alpha = 0$ , obtemos os polinômios ortogonais do tipo Hermite

$$H_{2n}^M(x) := H_{2n}^{(0, M)}(x) = L_n^{(-1/2, M/\Gamma(1/2))}(x^2)$$

e

$$H_{2n+1}^M(x) := H_{2n+1}^{(0, 0)}(x) = x L_n^{(1/2)}(x^2).$$

*Demonstração.* É análoga à do Teorema 5.5. □

Denotemos por  $h_{2n,k}^M(\alpha)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ , e  $h_{2n+1,k}(\alpha)$ ,  $1 \leq k \leq 2n+1$ , os zeros dos polinômios do tipo Hermite (generalizado)  $H_{2n}^{(\alpha, M)}(x)$  e  $H_{2n+1}^{(\alpha, M)}(x)$ , respectivamente, arrançados na seguinte forma:  $[h_{2n,n}^M(\alpha)]^2 < \dots < [h_{2n,1}^M(\alpha)]^2$  e  $[h_{2n+1,n}(\alpha)]^2 < \dots < [h_{2n+1,1}(\alpha)]^2$ . Devido à propriedade de simetria desses polinômios, temos que  $h_{2n,k}^M(\alpha) = -h_{2n,2n-k+1}^M(\alpha)$  e  $h_{2n+1,k}(\alpha) = -h_{2n+1,2n+2-k}(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e, de (5.61) e (5.62), segue que

$$[h_{2n,k}^M(\alpha)]^2 = x_{n,k}^{M/\Gamma(\alpha+1/2)}(\alpha - 1/2) \quad \text{e} \quad [h_{2n+1,k}(\alpha)]^2 = x_{n,k}(\alpha + 1/2).$$

Portanto, como consequência do Teorema 5.15, temos (ver [44]):

**Teorema 5.18** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Se  $n \in \mathbb{N}$ , então*

(i) *as desigualdades*

$$\begin{aligned} 0 < [h_{2n,n}^M(\alpha)]^2 < x_{n,n}(\alpha - 1/2) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 3/2) < \dots \\ < x_{n-1,1}(\alpha + 3/2) < [h_{2n,1}^M(\alpha)]^2 < x_{n,1}(\alpha - 1/2) \end{aligned}$$

são válidas para todo  $n \geq 2$ ,  $M > 0$  e  $\alpha > -1/2$ . Além disso, cada  $h_{2n,k}^M(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é uma função decrescente de  $M$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} [h_{2n,n}^M(\alpha)]^2 = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} [h_{2n,k}^M(\alpha)]^2 = x_{n-1,k}(\alpha + 3/2) \quad (5.63)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M [h_{2n,n}^M(\alpha)]^2 &= (\alpha + 3/2)g_n(\alpha - 1/2), \\ \lim_{M \rightarrow \infty} M \{ [h_{2n,k}^N(\alpha)]^2 - x_{n-1,n-k}(\alpha + 3/2) \} &= g_n(\alpha - 1/2); \end{aligned} \quad (5.64)$$

(ii) as desigualdades

$$\begin{aligned} 0 < [h_{2n+1,n}(\alpha)]^2 < x_{n,n}(\alpha + 1/2) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 5/2) < \dots \\ < x_{n-1,1}(\alpha + 5/2) < [h_{2n,1}(\alpha)]^2 < x_{n,1}(\alpha + 1/2) \end{aligned}$$

são válidas para todo  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1/2$ .

A função  $g_n(\alpha)$  em (5.64) foi definida em (5.56). Denotando, agora, por  $h_{2n,k}^M := h_{2n,k}^M(0)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ , e  $h_{2n+1,k} := h_{2n+1,k}(0)$ ,  $1 \leq k \leq 2n+1$ , os zeros dos polinômios do tipo Hermite  $H_{2n}^M(x)$  e  $H_{2n+1}^M(x)$ , respectivamente, temos:

**Corolário 5.6** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Então*

(i) as desigualdades

$$0 < [h_{2n,n}^M]^2 < x_{n,n}(-1/2) < x_{n-1,n-1}(3/2) < \dots < x_{n-1,1}(3/2) < [h_{2n,1}^M]^2 < x_{n,1}(-1/2)$$

são válidas para todo  $n \geq 2$  e  $M > 0$ . Além disso, cada  $h_{2n,k}^M$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é uma função decrescente de  $M$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} [h_{2n,n}^M]^2 = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} [h_{2n,k}^M]^2 = x_{n-1,k}(3/2), \quad (5.65)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M [h_{2n,n}^M]^2 &= 3/2 g_n(-1/2) \\ \lim_{M \rightarrow \infty} M \{ [h_{2n,k}^N]^2 - x_{n-1,n-k}(3/2) \} &= g_n(-1/2); \end{aligned} \quad (5.66)$$

(ii) as desigualdades

$$0 < [h_{2n+1,n}]^2 < x_{n,n}(1/2) < x_{n-1,n-1}(5/2) < \dots < x_{n-1,1}(5/2) < [h_{2n,1}]^2 < x_{n,1}(1/2)$$

são válidas para todo  $n \geq 2$ .

## 5.3 Zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev

Nesta seção, estudaremos polinômios ortogonais com relação a produtos escalares do tipo Sobolev (Sobolev discreto) da seguinte forma:

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Sigma} p(x)q(x)d\mu(x) + Np'(a)q'(a). \quad (5.67)$$

Mais especificamente, consideraremos os casos em que  $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$  com  $a = 1$ ,  $d\mu(x) = x^\alpha e^{-x} dx$  com  $a = 0$  e  $d\mu(x) = e^{-x^2} dx$  com  $a = 0$ , ou seja,

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Np'(1)q'(1), \quad (5.68)$$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Np'(0)q'(0) \quad (5.69)$$

e

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + Np'(0)q'(0). \quad (5.70)$$

Os polinômios ortogonais gerados pelos produtos internos (5.68), (5.69) e (5.70) são chamados de tipo Jacobi-Sobolev, tipo Laguerre-Sobolev e tipo Hermite-Sobolev, respectivamente. Recentemente, vários autores estudaram os zeros desses polinômios ortogonais. Destacamos alguns trabalhos como [4], [22] e [38]. Uma das contribuições desta tese é a demonstração da monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência dos zeros dos polinômios do tipo Jacobi-Sobolev, do tipo Laguerre-Sobolev e do tipo Hermite-Sobolev, além de resolver um problema sobre localização do menor ou maior zero desses polinômios (algumas simulações numéricas foram fornecidos por H. Dueñas e F. Marcellán em [22]).

### 5.3.1 Polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev

Consideremos os polinômios do tipo Jacobi-Sobolev  $\{P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)\}_{n=0}^\infty$ , ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Np'(1)q'(1), \quad (5.71)$$

com  $\alpha, \beta > -1$  e  $N > 0$ .

Obtemos a seguinte fórmula de conexão para esses polinômios:

**Teorema 5.19** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Os polinômios  $P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)$  podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - A_1(1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + A_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (5.72)$$

com

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0^{(N)}(n; \alpha, \beta) = 1 + ACN, \\ A_1 &= A_1^{(N)}(n; \alpha, \beta) = \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)} AN, \\ A_2 &= A_2^{(N)}(n; \alpha, \beta) = \frac{1}{4(\alpha+1)} AN, \end{aligned} \quad (5.73)$$

e

$$\begin{aligned} A &= A(n; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n)}, \\ C &= C(n; \alpha, \beta) = \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)(n(\alpha+2)(n+\alpha+\beta+1) - (\alpha+1)\beta)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

*Demonstração.* É análoga à do Teorema 5.1. □

De (5.72), podemos reescrever  $P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)$  como

$$P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + NF_{n, \alpha, \beta}(x), \quad (5.75)$$

com

$$\begin{aligned} F_{n, \alpha, \beta}(x) &= AC P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)} A(1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &\quad + \frac{A}{4(\alpha+1)} (1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Denotemos por  $x_{n,k}^N(\alpha, \beta)$  e  $\zeta_{n,k}(\alpha, \beta)$  os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)$  e  $F_{n, \alpha, \beta}(x)$ , respectivamente, todos arranjados em ordem crescente. No próximo resultado, provamos que no máximo um zero de  $P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x)$  está localizado fora do intervalo  $(-1, 1)$ . Além disso, fornecemos explicitamente o valor  $N_0$  da massa tal que, para  $N > N_0$ , esta situação ocorre, isto é, o maior zero  $x_{n,n}^N(\alpha, \beta)$  é maior do que 1. Mostraremos, ainda, que os zeros  $x_{n,k}^N(\alpha, \beta)$ ,  $\zeta_{n,k}(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  se entrelaçam (ver [15]).



**Teorema 5.20** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$-1 < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}^N(\alpha, \beta) < \zeta_{n,1}(\alpha, \beta) < \cdots < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^N(\alpha, \beta) < \zeta_{n,n}(\alpha, \beta) \quad (5.77)$$

são válidas para todo  $n \geq 2$ ,  $N > 0$  e  $\alpha, \beta > -1$ . Além disso, o maior zero,  $x_{n,n}^N(\alpha, \beta)$ , satisfaz

$$x_{n,n}^N(\alpha, \beta) < 1, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^N(\alpha, \beta) = 1, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^N(\alpha, \beta) > 1, \quad \text{para } N > N_0,$$

com  $N_0$  dado por (5.11), ou seja,

$$N_0 = \frac{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(n-1)(n+\beta)(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+2)A}.$$

*Demonstração.* Observe que os coeficientes de  $x^n$  em  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ,  $P_n^{(\alpha,\beta,N)}(x)$  e  $F_{n,\alpha,\beta}(x)$  são, respectivamente,

$$2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} A_0$$

e

$$\frac{(n-1)(n+\beta)(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{n+2}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+3)} \\ \times [n(\alpha+2)(n+\alpha+\beta) - (\alpha+1)(\alpha+\beta+2)].$$

É fácil ver que todos eles são positivos. Agora, da desigualdade (5.10) no Teorema 5.2, segue que

$$-1 < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}^N(\alpha, \beta) < \cdots < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}^N(\alpha, \beta) \quad (5.78)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Então, usando a fórmula de conexão (5.75), obtemos

$$\text{sign} \left( P_n^{(\alpha,\beta,N)}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) = \text{sign} \left( F_{n,\alpha,\beta}(x_{n,k}(\alpha, \beta)) \right) = (-1)^{n-k+1}$$

e

$$\text{sign} \left( P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n,k}^N(\alpha, \beta)) \right) = -\text{sign} \left( F_{n,\alpha,\beta}(x_{n,k}^N(\alpha, \beta)) \right) = (-1)^{n-k}$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Isso implica na propriedade de entrelaçamento (5.77). Para investigar a localização de  $x_{n,n}^N(\alpha, \beta)$  com relação ao ponto  $x = 1$ , é suficiente observar que  $P_n^{(\alpha,\beta,N)}(1) = 0$  se, e somente se,  $N = N_0$ .  $\square$

No próximo resultado, obtemos a monotonicidade dos zeros  $x_{n,k}^N(\alpha, \beta)$  com relação a  $N$  bem como a convergência deles, quando  $N$  tende ao infinito, aos zeros  $\zeta_{n,k}(\alpha, \beta)$  com uma velocidade de convergência da ordem de  $1/N$ .

**Teorema 5.21** (D. K. Dimitrov, M. V. Mello e F. R. Rafaeli, 2010). *Para todo  $n \geq 2$ ,  $N > 0$  e  $\alpha, \beta > -1$ , os zeros  $x_{n,k}^N(\alpha, \beta)$  são funções crescentes de  $N$ . Além disso,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,k}^N(\alpha, \beta) = \zeta_{n,k}(\alpha, \beta)$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N[\zeta_{n,k}(\alpha, \beta) - x_{n,k}^N(\alpha, \beta)] = g_{n,k}(\alpha, \beta), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.79)$$

com

$$g_{n,k}(\alpha, \beta) = \frac{(a_n(\alpha, \beta)\zeta_{n,k}(\alpha, \beta) + b_n(\alpha, \beta))([\zeta_{n,k}(\alpha, \beta)]^2 - 1)}{A(c_n(\alpha, \beta)[\zeta_{n,k}(\alpha, \beta)]^2 + d_n(\alpha, \beta)\zeta_{n,k}(\alpha, \beta) + e_n(\alpha, \beta))}, \quad (5.80)$$

e

$$\begin{aligned} a_n(\alpha, \beta) &= 4n(\alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1), \\ b_n(\alpha, \beta) &= 4(\alpha + 1)[2(\alpha + 1) - n(n + \alpha + \beta + 1)], \\ c_n(\alpha, \beta) &= [4C(\alpha + 1) - (n - 1)n(n + \alpha + \beta + 1)] \\ &\quad \times [4C(\alpha + 1) + n(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2)], \\ d_n(\alpha, \beta) &= 2(\alpha + 1)\{-16C^2(\alpha + 1) \\ &\quad - (n - 1)n(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2) \\ &\quad + 4C[(\alpha + 1)(\alpha + 2) + \beta(\alpha + 1 - n(n + \alpha + \beta + 1))]\}, \\ e_n(\alpha, \beta) &= 16C^2(\alpha + 1)^2 \\ &\quad + 4C(\alpha + 1)[2(\alpha + 1)(\alpha - \beta + 2) + n(-\alpha + \beta - 3)(n + \alpha + \beta + 1)] \\ &\quad + (n - 1)n(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2)[-2(\alpha + 1) + n(n + \alpha + \beta + 1)]. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Isso é consequência de (5.75), das desigualdades (5.77) e do Teorema 3.9. Para calcular explicitamente o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N[\zeta_{n,k}(\alpha, \beta) - x_{n,k}^N(\alpha, \beta)] = \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(\zeta_{n,k}(\alpha, \beta))}{F'_{n, \alpha, \beta}(\zeta_{n,k}(\alpha, \beta))},$$

usamos (2.17), (2.19) e (5.76) e obtemos

$$\frac{F'_{n,\alpha,\beta}(\zeta_{n,k}(\alpha, \beta))}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta_{n,k}(\alpha, \beta))} = \frac{1}{g_{n,k}(\alpha, \beta)},$$

com  $g_{n,k}(\alpha, \beta)$  dado por (5.80). □

Simulações numéricas mostram que todas as quantidades

$$N[\zeta_{n,k}(\alpha, \beta) - x_{n,k}^N(\alpha, \beta)], \quad k = 1, \dots, n,$$

crecem com  $N$ , para  $N > 0$ .

### 5.3.2 Polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev

Consideremos os polinômios do tipo Laguerre-Sobolev,  $\{L_n^{(\alpha,M,N)}(x)\}_{n \geq 0}$ , que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Np'(0)q'(0), \quad (5.81)$$

com  $\alpha > -1$  e  $N > 0$ .

A seguir, apresentaremos uma fórmula de conexão para esses polinômios, obtida por R. Koekoek e H. G. Meijer [38], em 1993.

**Teorema 5.22** (R. Koekoek e H. G. Meijer, 1993). *Os polinômios  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$  podem ser representados por*

$$L_n^{(\alpha,N)}(x) = A_0 L_n^{(\alpha)}(x) + A_1 \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) + A_2 \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x), \quad (5.82)$$

com

$$A_0 = A_0^{(N)}(\alpha) = 1 + \frac{n(\alpha + 2) - (\alpha + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 3)} N \binom{n + \alpha}{n - 2}$$

$$A_1 = A_1^{(N)}(\alpha) = \frac{n - 1}{\alpha + 1} N \binom{n + \alpha}{n - 1}$$

$$A_2 = A_2^{(N)}(\alpha) = \frac{N}{\alpha + 1} \binom{n + \alpha}{n - 1}.$$

Seja

$$F_{n,\alpha}(x) := \frac{n(\alpha+2) - (\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)} \binom{n+\alpha}{n-2} L_n^{(\alpha)}(x) + \frac{n-1}{\alpha+1} \binom{n+\alpha}{n-1} \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) + \frac{1}{\alpha+1} \binom{n+\alpha}{n-1} \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x). \quad (5.83)$$

Então, de (5.82),  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$  pode ser reescrito como

$$L_n^{(\alpha,N)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + NF_{n,\alpha}(x). \quad (5.84)$$

Denotemos, agora, por  $x_{n,k}^N(\alpha)$ ,  $x_{n,k}(\alpha)$  e  $\zeta_{n,k}(\alpha)$  os zeros de  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$ ,  $L_n^{(\alpha)}(x)$  e  $F_{n,\alpha}(x)$ , respectivamente, todos arranjados em ordem decrescente. No próximo resultado, provamos que no máximo um zero de  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$  está localizado fora do intervalo  $[0, +\infty)$ , fato esse já observado em [22] e [38]. Além disso, fornecemos explicitamente o valor  $N_0$  da massa tal que, para  $N > N_0$ , esta situação ocorre, isto é, o menor zero  $x_{n,n}^N(\alpha, \beta)$  é negativo. Em [22] foi provado que os zeros satisfazem  $x_{n,n}^N(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < \dots < x_{n,1}^N(\alpha, \beta) < x_{n,1}(\alpha, \beta)$ . Nós provamos essas desigualdades de outra forma e, também, o entrelaçamento de  $x_{n,n}^N(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  com os zeros  $\zeta_{n,k}(\alpha, \beta)$  (ver [15]).

**Teorema 5.23** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *As desigualdades*

$$\zeta_{n,n}(\alpha) < x_{n,n}^N(\alpha) < x_{n,n}(\alpha) < \dots < \zeta_{n,1}(\alpha) < x_{n,1}^N(\alpha) < x_{n,1}(\alpha) \quad (5.85)$$

são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e todo  $k$  com  $1 \leq k \leq n-1$ . Além disso, o menor zero  $x_{n,n}^N(\alpha)$  satisfaz

$$x_{n,n}^N(\alpha) > 0, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^N(\alpha) = 0, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^N(\alpha) < 0, \quad \text{para } N > N_0,$$

com  $N_0$  dado por (5.19), ou seja

$$N_0 = \frac{(\alpha+1)\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(n+\alpha+2)}.$$

*Demonstração.* Observe que os coeficientes de  $x^n$  em  $L_n^{(\alpha)}(x)$ ,  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$  e  $F_{n,\alpha}(x)$  são dados por

$$\frac{(-1)^n}{n!}, \quad \frac{(-1)^n}{n!}A_0 \quad \text{e} \quad \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n(\alpha+2) - (\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)} N \binom{n+\alpha}{n-2},$$

respectivamente. É fácil ver que, dependendo da paridade, todos eles são positivos ou negativos. Agora, das desigualdades (5.18) no Teorema 5.4, segue que

$$x_{n,n}^N(\alpha) < x_{n,n}(\alpha) < \cdots < x_{n,1}^N(\alpha) < x_{n,1}(\alpha) \quad (5.86)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Então, usando a fórmula de conexão (5.84), obtemos

$$\text{sign} \left( L_n^{(\alpha,N)}(x_{n,k}(\alpha)) \right) = \text{sign} \left( F_{n,\alpha}(x_{n,k}(\alpha)) \right) = (-1)^{n-k+1}$$

e

$$\text{sign} \left( L_n^{(\alpha)}(x_{n,k}^N(\alpha)) \right) = -\text{sign} \left( F_{n,\alpha}(x_{n,k}^N(\alpha)) \right) = (-1)^{n-k},$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Isso implica na propriedade de entrelaçamento (5.85). Para investigar a localização de  $x_{n,n}^N(\alpha)$  com relação à origem, é suficiente observar que  $L_n^{(\alpha,N)}(0) = 0$  se, e somente se,  $N = N_0$ .  $\square$

Fazemos um comentário aqui sobre  $N_0$ . Em [22], H. Dueñas e F. Marcellán consideraram os polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev,  $\widehat{L}_n^{(\alpha,\widehat{N})}(x)$ , gerados pelo produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + \widehat{N}p'(0)q'(0),$$

com  $\alpha > -1$  e  $\widehat{N} > 0$ . Observe que as sequências de polinômios ortogonais  $\{L_n^{(\alpha,N)}(x)\}_{n \geq 0}$  e  $\{\widehat{L}_n^{(\alpha,\widehat{N})}(x)\}_{n \geq 0}$  coincidem quando  $\widehat{N} = \Gamma(\alpha+1)N$ . Portanto, todos os resultados com relação aos zeros de  $L_n^{(\alpha,N)}(x)$  obtidos nesta tese podem ser reescritos de maneira a se obter resultados equivalentes sobre os zeros dos polinômios  $\widehat{L}_n^{(\alpha,\widehat{N})}(x)$ , substituindo  $N$  por  $\widehat{N}/\Gamma(\alpha+1)$ .

Fazendo  $N_0 = \widehat{N}_0/\Gamma(\alpha+1)$ , concluímos que o menor zero  $\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha)$  do  $n$ -ésimo

polinômio ortogonal do tipo Laguerre-Sobolev  $\widehat{L}_n^{(\alpha, \widehat{N})}(x)$  satisfaz

$$\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha) > 0, \quad \text{para } \widehat{N} < \widehat{N}_0,$$

$$\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha) = 0, \quad \text{para } \widehat{N} = \widehat{N}_0,$$

$$\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha) < 0, \quad \text{para } \widehat{N} > \widehat{N}_0,$$

com

$$\widehat{N}_0 = \Gamma(\alpha + 1)N_0 = \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \quad (5.87)$$

Destacamos que resultados numéricos foram fornecidos em [22] no intuito de determinar os valores de  $\widehat{N}$  para os quais  $\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha)$  seja positivo (negativo). Relatamos que aqueles valores numéricos de  $\widehat{N}_0$  coincidem com a expressão (5.87) obtida nesta tese.

No próximo resultado, obtemos a monotonicidade dos zeros  $x_{n,k}^N(\alpha)$  com relação a  $N$  bem como a convergência, quando  $N$  tende ao infinito, aos zeros  $\zeta_{n,k}(\alpha)$  com velocidade de convergência da ordem de  $1/N$ .

**Teorema 5.24** (D. K. Dimitrov, F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Para todo  $n \geq 2$ ,  $N > 0$  e  $\alpha > -1$ , os zeros  $x_{n,k}^N(\alpha)$  são funções decrescentes de  $N$ . Além disso,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,k}^N(\alpha) = \zeta_{n,k}(\alpha)$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N[x_{n,k}^N(\alpha) - \zeta_{n,k}(\alpha)] = g_{n,k}(\alpha), \quad k = 1, \dots, n,$$

com

$$g_{n,k}(\alpha) = \binom{n+\alpha}{n-1} \frac{(n-1)(n+\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2} \frac{a_n(\alpha)[\zeta_{n,k}(\alpha)]^2 + b_n(\alpha)\zeta_{n,k}(\alpha) + c_n(\alpha)}{n[\zeta_{n,k}(\alpha)]^2 - (\alpha+1)\zeta_{n,k}(\alpha)}, \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} a_n(\alpha) &= (\alpha+2)^2 n^2 - \alpha(\alpha+2)n - (\alpha+1), & b_n(\alpha) &= (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \text{ e} \\ c_n(\alpha) &= -(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Isso segue de (5.84), das desigualdades (5.85) e do Teorema 3.9. Para calcular explicitamente o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N[x_{n,k}^N(\alpha) - \zeta_{n,k}(\alpha)] = \frac{L_n^{(\alpha)}(\zeta_{n,k}(\alpha))}{F'_{n,\alpha}(\zeta_{n,k}(\alpha))},$$

usamos (2.26), (2.28) e (5.83) para obter, após alguns cálculos,

$$\frac{F'_{n,\alpha}(\zeta_{n,k}(\alpha))}{L_n^{(\alpha)}(\zeta_{n,k}(\alpha))} = \frac{1}{g_{n,k}(\alpha)},$$

com  $g_{n,k}(\alpha)$  dado por (5.88). □

Experimentos numéricos mostram que todas as quantidades

$$N[x_{n,k}^N(\alpha) - \zeta_{n,k}(\alpha)], \quad k = 1, \dots, n-2, n,$$

crescem com  $N$ , para  $N > 0$ , enquanto que  $N[x_{n,n-1}^N(\alpha) - \zeta_{n,n-1}(\alpha)]$  decresce.

### 5.3.3 Polinômios ortogonais do tipo Hermite-Sobolev

Consideremos os polinômios do tipo Hermite  $Q_n(x) = H_n^{(\alpha,N)}(x)$ , ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)|x|^{2\alpha}e^{-x^2}dx + Np'(0)q'(0), \quad (5.89)$$

com  $\alpha > -1/2$  e  $N > 0$ .

**Teorema 5.25** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Seja  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (5.89). Então, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$H_{2n}^{(\alpha,N)}(x) = H_{2n}^{(\alpha,0)}(x) := Q_{2n}(x) = L_n^{(\alpha-1/2)}(x^2) \quad (5.90)$$

e

$$H_{2n+1}^{(\alpha,N)}(x) := Q_{2n+1}(x) = x L_n^{(\alpha+1/2, N/\Gamma(\alpha+3/2))}(x^2). \quad (5.91)$$

Para o caso  $\alpha = 0$ , obtemos os polinômios ortogonais do tipo Hermite

$$H_{2n}^N(x) := H_{2n}^{(0,0)}(x) = L_n^{(-1/2)}(x^2)$$

e

$$H_{2n+1}^N(x) := H_{2n+1}^{(0,N)}(x) = x L_n^{(1/2, N/\Gamma(\alpha+3/2))}(x^2).$$

*Demonstração.* A demonstração é análoga à do Teorema 5.17. □

Denotemos por  $h_{2n,k}(\alpha)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ , e  $h_{2n+1,k}^N(\alpha)$ ,  $1 \leq k \leq 2n+1$ , os zeros dos polinômios do tipo Hermite  $H_{2n}^{(\alpha,N)}(x)$  e  $H_{2n+1}^{(\alpha,N)}(x)$ , respectivamente, arranados na seguinte forma:  $[h_{2n,n}(\alpha)]^2 < \dots < [h_{2n,1}(\alpha)]^2$  e  $[h_{2n+1,n}^N(\alpha)]^2 < \dots < [h_{2n+1,1}^N(\alpha)]^2$ . Em razão da propriedade de simetria desses polinômios, temos que  $h_{2n,k}(\alpha) = -h_{2n,2n-k+1}(\alpha)$  e  $h_{2n+1,k}^N(\alpha) = -h_{2n+1,2n+2-k}^N(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e, de (5.61) e (5.62), temos

$$[h_{2n,k}(\alpha)]^2 = x_{n,k}(\alpha - 1/2) \quad \text{e} \quad [h_{2n+1,k}^N(\alpha)]^2 = x_{n,k}^{N/\Gamma(\alpha+3/2)}(\alpha + 1/2).$$

Portanto, como consequência do Teorema 5.15, temos (ver [44]):

**Teorema 5.26** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Então,*

(i) *as desigualdades*

$$\begin{aligned} 0 < [h_{2n,n}(\alpha)]^2 < x_{n,n}(\alpha - 1/2) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 3/2) < \dots \\ < x_{n-1,1}(\alpha + 3/2) < [h_{2n,1}(\alpha)]^2 < x_{n,1}(\alpha - 1/2) \end{aligned}$$

*são válidas para todo  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1/2$ ;*

(ii) *as desigualdades*

$$\begin{aligned} 0 < [h_{2n+1,n}^N(\alpha)]^2 < x_{n,n}(\alpha + 1/2) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 5/2) < \dots \\ < x_{n-1,1}(\alpha + 5/2) < [h_{2n,1}^N(\alpha)]^2 < x_{n,1}(\alpha + 1/2) \end{aligned}$$

*são válidas para todo  $n \geq 2$ ,  $N > 0$  e  $\alpha > -1/2$ . Além disso, cada  $h_{2n+1,k}^N(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é uma função decrescente de  $N$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [h_{2n+1,n}^N(\alpha)]^2 = 0 \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [h_{2n+1,k}^N(\alpha)]^2 = x_{n-1,k}(\alpha + 5/2), \quad (5.92)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N [h_{2n+1,n}^N(\alpha)]^2 &= (\alpha + 5/2)g_n(\alpha + 1/2), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N \{ [h_{2n+1,k}^N(\alpha)]^2 - x_{n-1,k}(\alpha + 5/2) \} &= g_n(\alpha + 1/2). \end{aligned} \quad (5.93)$$

A função  $g_n(\alpha)$  em (5.95) foi definida em (5.56).

Denotando, agora, por  $h_{2n,k} := h_{2n,k}(0)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ , e  $h_{2n+1,k}^N := h_{2n+1,k}^N(0)$ ,  $1 \leq k \leq 2n+1$ , os zeros dos polinômios do tipo Hermite-Sobolev  $H_{2n}^N(x)$  e  $H_{2n+1}^N(x)$ , respectivamente, temos:



**Corolário 5.7** (F. Marcellán e F. R. Rafaeli, 2010). *Se  $n \in \mathbb{N}$ , então*

(i) *as desigualdades*

$$0 < [h_{2n,n}]^2 < x_{n,n}(-1/2) < x_{n-1,n-1}(3/2) < \cdots < x_{n-1,1}(3/2) < [h_{2n,1}]^2 < x_{n,1}(-1/2)$$

*são válidas para todo  $n \geq 2$  e  $\alpha > -1/2$ ;*

(ii) *as desigualdades*

$$0 < [h_{2n+1,n}^N]^2 < x_{n,n}(1/2) < x_{n-1,n-1}(5/2) < \cdots < x_{n-1,1}(5/2) < [h_{2n,1}^N]^2 < x_{n,1}(1/2)$$

*são válidas para todo  $n \geq 2$  e  $N > 0$ . Além disso, cada  $h_{2n+1,k}^N$ ,  $k = 1, \dots, n$ , é uma função decrescente de  $N$  e, para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [h_{2n+1,n}^N]^2 = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [h_{2n+1,k}^N]^2 = x_{n-1,k}(5/2). \quad (5.94)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N [h_{2n+1,n}^N]^2 &= 5/2 g_n(1/2), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N \{ [h_{2n+1,k}^N]^2 - x_{n-1,k}(5/2) \} &= g_n(1/2). \end{aligned} \quad (5.95)$$

## 5.4 Problemas em aberto

### 5.4.1 Polinômios ortogonais gerados por uma perturbação na medida

Seja  $\mu$  uma medida de Borel positiva com suporte  $\Sigma$ , subconjunto da reta real com uma quantidade infinita de pontos, e com momentos

$$\mu_n = \int_{\Sigma} |x|^n d\mu(x) < \infty$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Consideremos as seguintes transformações espectrais canônicas que correspondem a perturbações na medida  $\mu$ :

(i) Christoffel

$$d\tilde{\mu} = (x - a)d\mu, \quad a \notin \Sigma$$

(ii) Uvarov

$$d\mu^* = d\mu + M\delta_a, \quad a \notin \Sigma$$

com  $M \in \mathbb{R}_+$  e  $\delta_a$  sendo a função de Dirac em  $a$ .

(iii) Geronimus

$$d\hat{\mu} = \frac{1}{(x-a)}d\mu + M\delta_a, \quad a \notin \Sigma$$

com  $M \in \mathbb{R}_+$ .

Observe que os casos (5.31), (5.48) e (5.60) associados aos polinômios do tipo Jacobi, tipo Laguerre e tipo Hermite, respectivamente, são casos particulares da perturbação de Uvarov. Um dos nossos propósitos é tentar generalizar os resultados obtidos na Seção 5.2 em duas direções; Estudar o caso em que  $\mu$  é uma medida qualquer, e não apenas uma medida relacionada com os polinômios clássicos. Considerar também um ponto  $a$  qualquer fora de  $C_0(\Sigma)$  e não apenas um extremo do intervalo, como foi feito em (5.31) e (5.48).

**Problema 5.1.** *Estudar o comportamento dos zeros dos polinômios gerados pela perturbação de Uvarov (ii) com relação à massa  $M$  e o ponto  $a$ . Provar resultados de entrelaçamento, monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência. Fornecer também uma interpretação eletrostática para os casos clássicos.*

**Problema 5.2.** *Estudar o comportamento dos zeros dos polinômios gerados pela perturbação de Geronimus (iii) com relação à massa  $M$  e o ponto  $a$ . Provar resultados de entrelaçamento, monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência.*

## 5.4.2 Polinômios ortogonais do tipo Sobolev

Consideremos agora produtos escalares do tipo Sobolev da forma

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Sigma} p(x)q(x)d\mu(x) + Np'(a)q'(a). \quad (5.96)$$

**Problema 5.3.** *Estudar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais gerados pelo produto interno (5.96) com relação a massa  $N$  e o ponto  $a$ .*

**Problema 5.4.** *Estudar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais com relação ao produto interno do tipo Sobolev de ordem superior*

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Sigma} p(x)q(x)d\mu(x) + Np^{(j)}(a)q^{(j)}(a), \quad (5.97)$$

com  $j \in \mathbb{N}$ ,  $N \in \mathbb{R}_+$  e  $a \notin \Sigma$ . Investigar o entrelaçamento, monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência com relação a  $N$ .

**Problema 5.5.** *Estudar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais do tipo Sobolev generalizado, ortogonais com relação ao produto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + \sum_{i=0}^m M_i p^{(i)}(a)q^{(i)}(a), \quad (5.98)$$

com  $a \notin \Sigma$  e  $M_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Por exemplo, fixar  $m$  parâmetros, mover com o outro e investigar o que acontece com os zeros.

# Referências Bibliográficas

- [1] AHMED, S., MULDOON, M. E., SPIGLER, R. *Inequalities and numerical bounds for the zeros of ultraspherical polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986) 1000–1007.
- [2] ÁLAVAREZ-NODARSE, R., MARCELLÁN, F., PETRONILHO, J. *WKB approximation and Krall-type orthogonal polynomials*, Acta Appl. Math. 54 (1998) 27–58.
- [3] ALFARO, M., MARCELLÁN, F., MEIJER, H. G., REZOLA, M. L. *Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products*, J. Math. Anal. Appl. 184 (1994) 360–381.
- [4] ALFARO, M., MARCELLÁN, F., REZOLA, M. L. *On estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials*, Appl. Anal. 67 (1997) 157–174.
- [5] ALFARO, M., MARCELLÁN, F., REZOLA, M. L., RONVEAUX, M. L. *On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992) 737–757.
- [6] ALFARO, M., MORENO-BALCÁZAR, J. J., PEÑA, A., REZOLA, M. L. *Asymptotics for a generalization of Hermite polynomials*, Classical Analysis and ODEs (2009) Submitted.
- [7] ÁLVAREZ-NODARSE, R., MORENO-BALCÁZAR, J. J. *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag. Math. 15 (2004) 151–165.

- [8] AREA, I., DIMITROV, D. K., GODOY, E., RONVEAUX, A. *Zeros of Gegenbauer and Hermite polynomials and connection coefficients*, Math. Comp. 73 (2004) 1937–1951.
- [9] ARVESÚ, J., ÁLVAREZ-NODARSE, R., MARCELLÁN, F., PAN, K. *Jacobi-Sobolev-type orthogonal polynomials: second-order differential equation and zeros*, J. Comput. Appl. Math. 90 (1998) 135–156.
- [10] BRACCIALI, C. F., DIMITROV, D. K., RANGA, A. SRI *Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 143 (2002) 95–106.
- [11] CALOGERO, F. *Asymptotic behaviour of the zeros of the (generalized) Laguerre polynomials  $L_n^{(\alpha)}(x)$  as the index  $\alpha \rightarrow \infty$  and limiting formula relating Laguerre polynomials of large index and large argument to Hermite polynomials*, Nuovo Cimento 23 (1978) 101–102.
- [12] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York (1978) .
- [13] DIMITROV, D. K. *On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory 85 (1996) 89–97.
- [14] DIMITROV, D. K., MARCELLÁN, F., RAFAELI, F. R. *Monotonicity of zeros of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. (2010) Accept.
- [15] DIMITROV, D. K., MELLO, M. V., RAFAELI, F. R. *Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials*, Appl. Numer. Math. (2010) (Accept).
- [16] DIMITROV, D. K., NIKOLOV, G. *Sharp bounds for the extreme zeros of classical orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory (2009) Accept.
- [17] DIMITROV, D. K., RAFAELI, F. R. *Monotonicity of zeros of Jacobi polynomials*, J. Approx. Theory 149 (2007) 15–29.

- [18] DIMITROV, D. K., RAFAELI, F. R. *Monotonicity of zeros of Laguerre polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 233 (2009) 699–702.
- [19] DIMITROV, D. K., RODRIGUES, R. O. *On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials*, J. Approx. Theory 116 (2002) 224–239.
- [20] DUEÑAS, H., MARCELLÁN, F. *Laguerre-type orthogonal polynomials. Electrostatic interpretation*, Int. J. Pure Appl. Math. 38 (2007) 345–358.
- [21] DUEÑAS, H., MARCELLÁN, F. *The Jacobi-type orthogonal polynomials: holonomic equation and electrostatic interpretation*, Commun. Anal. Theory Contin. Fract. 15 (2008) 4–19.
- [22] DUEÑAS, H., MARCELLÁN, F. *The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. Holonomic equation and electrostatic interpretation*, Rocky Mountain J. Math. (2009) Accept.
- [23] ELBERT, A., MULDOON, M. E. *On the derivative with respect to a parameter of a zero of a Sturm-Liouville function*, SIAM J. Math. Anal. 25 (1994) 354–364.
- [24] ELBERT, A., SIAFARIKAS, P. D. *Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory 97 (1999) 31–39.
- [25] FAVARD, J. *Sur les polynomes de Tchebicheff*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 200 (1935) 2052–2053.
- [26] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*, vol. 2, Chelsea, New York, 1959.
- [27] GARRIDO, A., MARCELLÁN, F. *An electrostatic interpretation of zeros of Hermite-type orthogonal polynomials*, Commun. Anal. Theory Contin. Fract. 11 (2003) 50–63.
- [28] GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M. *Integrals Series and Products*, Academic Press, New York, 1980.

- [29] GRÜNBAUM, F. A. *Variations on a theme of Heine and Stieltjes: an electrostatic interpretation of the zeros of certain polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 99 (1998) 189–194.
- [30] HORN, R., JOHNSON, C. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [31] IFANTIS, E. K., SIAFARIKAS, P. D. *Differential inequalities on the greatest zero of Laguerre and ultraspherical polynomials*, in: Actas del VI Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones, Gijon (1989) 187–197.
- [32] IFANTIS, E. K., SIAFARIKAS, P. D. *Differential inequalities and monotonicity properties of the zeros of associated Laguerre and Hermite polynomials*, Ann. Numer. Math. 2 (1995) 79–91.
- [33] ISMAIL, M. E. H. *Monotonicity of zeros of orthogonal polynomials*, in: D. Stanton (Ed.), *q-Series and Partitions*, Springer-Verlag, New York, (1989) 177–190.
- [34] ISMAIL, M. E. H., LETESSIER, J. *Monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials*, in: M. Alfaro, J. S. Dehesa, F. J. Marcellán, J. L. Rubio de Francia, and J. Vinuesa, (Eds.), *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1329 (1988) 329–330.
- [35] ISMAIL, M. E. H., LI, X. *Bound on the extreme zeros of orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc 115 (1992) 131–140.
- [36] ISMAIL, M. E. H., ZHANG, R. *On the Hellmann-Feynman theorem and the variation of zeros certain special functions*, Adv. Appl. Discrete Math. 9 (1988) 439–446.
- [37] KOEKOEK, R. *Koornwinder's Laguerre Polynomials*, Delf Progr. Rep. 12 (1988) 393–404.
- [38] KOEKOEK, R., MEIJER, H. G. *A generalization of Laguerre polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993) 768–782.

- [39] KOORNWINDER, T. H. *Orthogonal polynomials with weight function  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$* , Canad. Math. Bull. 27 (1984) 205–214.
- [40] LAFORGIA, A. *A monotonic property for the zeros of ultraspherical polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc 83 (1981) 757–758.
- [41] LAFORGIA, A. *Monotonicity properties for the zeros of orthogonal polynomials and Bessel function*, in: Polynomes Orthogonaux et Applications, Proceedings of the Laguerre Symposium, Bar-de-Duk, Spain, 1984, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1171 (1985) 267–277.
- [42] MARCELLÁN, F., MORENO-BALCÁZAR, J. J. *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*, Acta Appl. Math 94 (2006) 163–192.
- [43] MARCELLÁN, F., PÉREZ, T. E., PIÑAR, M. A. *On zeros of Sobolev type orthogonal polynomials*, Rend. Mat. Appl. 12 (1992) 455–473.
- [44] MARCELLÁN, F., RAFAELI, F. R. *A note on monotonicity of zeros of generalized Hermite-Sobolev type orthogonal polynomials*, Integral Transforms Spec. Funct. (2010) Accept.
- [45] MARDEN, M. *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc. Surveys, vol. 3, 1996.
- [46] MARKOV, A. *Sur les racines de certaines équations (second note)*, Math. Ann. 27 (1886) 177–182.
- [47] MEIJER, H. G. *On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, J. Comput. Appl. Math. 49 (1993) 179–191.
- [48] MEIJER, H. G. *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, J. Math. Anal. Appl. 172 (1993) 520–532.
- [49] NATALINI, P., PALUMBO, B. *Some monotonicity results on the zeros of the generalized Laguerre polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 153 (2003) 355–360.



- [50] RAFAELI, F. R. *Teorema de Sturm e zeros de polinômios ortogonais*, Dissertação de Mestrado, DCCE/IBILCE/UNESP, 2007.
- [51] RODRIGUES, R. O. *Zeros de polinômios ortogonais*, Dissertação de Mestrado, DCCE/IBILCE/UNESP, 2000.
- [52] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle: Part 1: Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 2004 .
- [53] SPIGLER, R. *On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with the parameter*, Canad. Math. Bull. 27 (1984) 472–477.
- [54] STIELTJES, T. J. *Sur les polynômes de Jacobi*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 100 (1885) 620–622.
- [55] STIELTJES, T. J. *Sur les quelques théorèmes d’algèbre*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 100 (1885) 439–440 .
- [56] STIELTJES, T. J. *Sur les racines de l’équation  $X_n = 0$* , C. R. Math. Acad. Sci. Paris 9 (1886) 385–400.
- [57] SZEGŐ, G. *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 23, 1975.